Math
2708
48

Digitized by Google

32-6

Math 2708.48

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.

CHRISTO ET ECCLESIAE

BOUGHT WITH

THE GIFT OF

WILLIAM GRAY,

OF BOSTON, MASS.

(Class of 1829).

Aug. 28, 1863.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Theorie

der

Differenzen und Summen.

Ein Lehrbuch

von

Dr. *Oskar Schlömilch*,

ausserordentlichem Professor an der Universität zu Jena.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1848.

Digitized by Google

Math 2708.48

1863, Aug.
$ 1.54
Gray Fund.

Digitized by Google

Vorwort.

Wenn es einigermassen verdienstlich ist, weniger zur Erweiterung als vielmehr zur grösseren Verbreitung einer Wissenschaft das Seinige beizutragen, so hoffe ich mit der Herausgabe vorliegender Schrift keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben. Sie soll nicht mehr noch weniger als ein Compendium für akademische Vorlesungen und zugleich ein Lehrbuch zum Selbstunterrichte sein, was vielleicht den Freunden der Wissenschaft um so willkommener ist, als noch kein Werk existirt, welches die zahlreichen in verschiedenen Zeitschriften und einzelnen Werken zerstreuten Erweiterungen enthielte, womit die Theorie der Differenzen und Summen in neuerer Zeit beschenkt worden ist. Gleichwohl wird man nicht zu erwarten haben, dass ich jede zu meinem Thema gehörige Betrachtung, die irgend wo einmal vorkommt, *in extenso* mittheile, denn einerseits sind mehrere ältere Arbeiten durch neuere umfassendere Spekulationen überflüssig geworden, andererseits bestimmten mich praktische Rücksichten, manche sehr weitläufige Untersuchung wegzulassen, die entweder nur einen geringen Grad von Allgemeinheit besass, oder zu so unförmlichen Resultaten führte, dass man ihre praktische Brauchbarkeit in Zweifel ziehen musste. — Den literarischen Angaben habe

Digitized by Google

ich die möglichste Vollständigkeit zu verschaffen gesucht, ihre etwaigen Mängel aber bitte ich mit den beschränkten Verhältnissen eines unbesoldeten Professors und mit der im mathematischen Fache ganz ausserordentlichen Aermlichkeit unserer Universitätsbibliothek entschuldigen zu wollen. —

Besondern Dank endlich schulde ich Herrn Dr. Wiegand für die gefällige Uebernahme der Correktur und dem Herrn Verleger für die elegante Ausstattung des Buches.

Jena im August 1848.

Schlömilch.

Digitized by Google

Inhalt.

Erster Theil. Differenzenrechnung.

Seite.

§. 1. Die Funktionen und ihre Differenzen . . . . ,, 3.
§. 2. Die Differenzen der einfachsten Funktionen . . . . ,, 6.
§. 3. Die Differenzen zusammengesetzter Funktionen . . . . ,, 11.
§. 4. Differenzen höherer Ordnungen . . . . ,, 13.
§. 5. Umkehrung des im vorigen Paragraphen behandelten Problemes . . ,, 20.
§. 6. Digression über das Theorem von Taylor . . . . ,, 26.
§. 7. Die Interpolationsformel . . . . ,, 31.
§. 8. Differenzen der Funktionen mehrerer Variabelen . . . . ,, 36.
§. 9. Zusammenhang zwischen den Differenzen und höheren Differentialquotienten einer Funktion . . . . ,, 40.
§. 10. Zwei Rekursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen . . . . . ,, 44.
§. 11. Summirung einer Reihe von Differenzen . . . . ,, 47.
§. 12. Restbetrachtung . . . . ,, 52.
§. 13. Entwickelung von $h:(e^h-1)$ . . . . ,, 63.
§. 14. Entwickelung von $\Gamma(x)$ . . . . ,, 69.
§. 15. Nährungsformeln für Factoriellen . . . . ,, 78.

Zweiter Theil. Summenrechnung.

§. 1. Begriff und Bezeichnungsweise der Summenrechnung . . . . ,, 85.
§. 2. Summen der einfachsten Funktionen . . . . ,, 88.
§. 3. Allgemeine Regeln für die Integration zusammengesetzter Funktionen . ,, 90.
§. 4. Endliche Integration der rationalen ganzen algebraischen Funktionen . ,, 93.
§. 5 Endliche Integration gebrochener rationaler algebraischer Funktionen. ,, 100.
§. 6. Summirung von $x^m a^x, x^m \cos x$ und $x^m \sin x$ . . . . ,, 105.
§. 7. Integration von $\cos^m x$, $\sin^m x$ und ähnlichen Funktionen . . . . . ,, 108.

Digitized by Google

Seite.

§. 8. Die vielfachen endlichen Integrale . . . . „ 115.
§. 9. Integration durch Potenzenreihen . . . . „ 118.
§. 10. Integration durch goniometrische Reihen . . . . „ 125.
§. 11. Integration durch halbconvergente Reihen . . . . „ 131.
§. 12. Beispiele zu den Theoremen des vorigen Paragraphen . . . . . . „ 136.
§. 13. Digression über die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. „ 145.
§. 14. Einfache Summirung durch Quadraturen . . . . „ 151.
§. 15. Beispiele und Erweiterung des vorigen Theoremes . . . . „ 158.
§. 16. Reduction vielfacher Summen auf einfache bestimmte Integrale . . „ 165.

Dritter Theil. Differenzengleichungen.

§. 1. Allgemeine Begriffe . . . . „ 177.
§. 2. Integration der Differenzengleichungen ersten Grades und erster Ordnung . . . . „ 180.
§. 3. Differenzengleichungen ersten Grades und beliebiger Ordnung . . . „ 187.
§. 4. Fortsetzung . . . . „ 191.
§. 5. Fortsetzung . . . . „ 197.
§. 6. Integration durch bestimmte Integrale . . . . „ 200.
§. 7. Beispiele zur vorigen Methode . . . . „ 207.
§. 8. Integration mit Hülfe unendlicher Reihen . . . . „ 215.
§. 9. Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Variablen . . . . . „ 221.
§. 10. Fortsetzung . . . . „ 228.
§. 11. Differenzengleichungen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . „ 235.
Literarhistorisches . . . . „ 239.

Digitized by Google

Erster Theil.

Differenzenrechnung.

Digitized by Google

Digitized by Google

§. 1.

Die Funktionen und ihre Differenzen.

Die allgemeinste Abstraktion, zu welcher sich die Mathematik im Verlaufe ihrer stufenweisen Ausbildung erhoben hat und zugleich die höchste, zu der sie sich überhaupt erheben kann, ist der Begriff des unbestimmt allgemeinen Zusammenhanges zwischen zwei oder mehreren veränderlichen Grössen. Man gelangt zu demselben, wenn man es versucht die Gränzen der Elementarmathematik dadurch zu erweitern, dass man alle die Beschränkungen, welche den Grössen, womit sie sich beschäftigt, auferlegt sind, so weit als diess überhaupt thunlich ist, wegschafft. Betrachten wir nun den Gegenstand der niederen Arithmetik näher, so finden wir eine Reihe von Regeln, welche uns die Anwendung gewisser Rechnungsoperationen lehren, vorausgesetzt, dass die Grössen, auf welche die Operationen angewendet werden sollen, bestimmte aus einer angegebenen Menge von Einheiten zusammengesetzte Zahlen sind. Wollen wir die Beschränkung, welche in der bezeichneten Voraussetzung liegt, aufheben, wollen wir die Grössen gewissermassen aus dieser Starrheit erlösen und in Fluss bringen, so müssen wir zum Begriffe der willkührlich veränderlichen Grösse aufsteigen. Damit allein, oder auch mit der Verallgemeinerung, dass man sich mehrere solcher veränderlichen Grössen dächte, würde aber nicht viel und am allerwenigsten eine Rechnung anzufangen sein, denn bei der Beweglichkeit jeder dieser für sich variablen Grössen würde sich die ganze Abstraktion ins Unbestimmte hinein verlieren. Diess nöthigt uns zu einem neuen Schritte, wir sind nämlich gezwungen eine Verbindung dieser Veränderlichen hinzuzudenken, einen Zusammenhang ähnlich dem zwischen Ursache und Wirkung. Dieser Zusammenhang zwischen zwei

Digitized by Google

oder mehreren Variabeln bildet, ganz unbestimmt und allgemein gedacht, den Begriff der *Funktion*, den wichtigsten der höheren Mathematik. Sind z. B. zwei veränderliche Grössen x und y durch die Gleichung $y = 2x + 3$ mit einander verbunden, so erkennt man leicht einen wesentlichen Unterschied zwischen den Aenderungsweisen dieser Variabeln. Sobald nämlich x schlechthin willkührlich angenommen werden darf, findet sich y durch die aufgestellte Gleichung von selbst und jeder individuelle Werth des x zieht einen ihm entsprechenden nach einem gewissen Gesetze gebildeten Werth von y nach sich. So erhält man für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach $y = 3, 5, 7, 9 \ldots$. Wir unterscheiden daher *unabhängige* und *abhängige* veränderliche Grössen und in sofern diese mit jenen durch eine gewisse Gleichung verbunden sind, nennen wir eine Grösse der letzteren Art eine *Funktion* von einer Grösse der ersten Art. So ist in jeder der Gleichungen $y = (x-1)^2$, $y = log\, x$, $y = sin\, x$ jedesmal y eine Funktion von x, aber auch jedesmal das Gesetz, nach welchem sich y aus x bildet, d. h. die *Natur der Funktion* verschieden. Die Bezeichnungsweise dafür besteht darin, dass man für die variabeln Grössen die letzten Buchstaben des Alphabetes und für die Funktion einen der Buchstaben $F, f, \varphi, \psi, \chi$ etc. braucht, auf welchen man die unabhängige Veränderliche in Klammern eingeschlossen folgen lässt. Eine Gleichung wie $y = f(x)$ bedeutet demnach: mit Hülfe gewisser nicht näher bestimmter Rechnungsoperationen lässt sich zu jedem individuellen x ein zugeordnetes y finden. — Man kann auch x und y ihre Rollen vertauschen lassen; sieht man z. B. in der Gleichung $y = 2x + 3$ jetzt y als unabhängige und x als abhängige Variabele an, so wird $x = \frac{1}{2}(y-3)$; in ähnlicher Weise folgt aus jeder Gleichung wie $y = \varphi(x)$ eine andere von der Form $x = \psi(y)$. — Es versteht sich nach dieser Bestimmung fast von selbst, was man sich unter einer Funktion zweier oder mehrerer unabhängiger Variabeln zu denken habe, nämlich eine Grösse, welche von zwei willkührlichen Veränderlichen zugleich abhängt; ein Beispiel hierzu gäbe die Gleichung $y = x^2 + log\, z$, worin y als Funktion von x und z erscheint. Das allgemeine Schema einer Funktion zweier Variabeln wird in Zei-

Digitized by Google

chen durch $y = f(x, z)$ dargestellt, ebenso würden $y = F(x, z, u)$, $y = \Phi(x, z, u, t)$ u. s. w. Funktionen von drei, vier Variabeln u. s. w. ausdrücken. Auch hier kann man einen Rollentausch unter den vorhandenen Veränderlichen vornehmen; aus der Gleichung $y = f(x, z)$ folgt z. B. $x = \varphi(y, z)$ und $z = \psi(x, y)$ und ganz ähnlich verhält sich die Sache mit den übrigen Gleichungen der Art.

Der Begriff der Funktion bringt uns nun von selbst auf eine Frage, welche zu dem Thema unserer Untersuchungen, den Differenzen variabler Grössen, hinleitet. Lassen wir nämlich in einer Gleichung wie $y = f(x)$ die unabhängige Veränderliche x um eine bestimmte uns bekannte Grösse h zunehmen, so wird sich im Allgemeinen auch die abhängige Variabele y ändern, aber da wir nicht wissen um wie viel, so liegt die Frage nach dem Betrage dieser Aenderung am nächsten. Sowie nun $f(x)$ den früheren Werth von y darstellte, so bezeichnet, nachdem $x + h$ an die Stelle von x getreten ist, $f(x + h)$ den neuen Werth von y, und da offenbar

$$f(x + h) = f(x) + [f(x + h) - f(x)]$$

ist, so giebt der Unterschied $f(x + h) - f(x)$ die Grösse der Aenderung von $f(x)$ oder y an. Diesen Unterschied nennt man die *Differenz* der Funktion $f(x)$ und bezeichnet sie mit $\Delta f(x)$, wobei man sich nur hüten muss das Zeichen Δ mit einem Faktor zu verwechseln. Es ist daher identisch, da es sich blos um die Definition eines Zeichens handelt:

1) $$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

oder man kann auch sagen: aus der Gleichung

2) $$y = f(x)$$

folgt, wennn sich x um h ändert, die neue Gleichung

3) $$\Delta y = f(x + h) - f(x).$$

Setzt man in der ersten Gleichung ganz einfach $f(x) = x$, so giebt dieselbe

$$\Delta x = (x + h) - x = h$$

und hierin spricht der Calcül gewissermassen die Forderung nach Consequenz in der Bezeichnungsweise aus. Die Gleichung sagt nämlich, da die Aenderung von $f(x)$ mit $\Delta f(x)$ bezeichnet worden ist, so

Digitized by Google

würde es consequent sein, die Aenderung von x, nämlich h, durch Δx anzudeuten. In der That werden wir auch diesen Fingerzeig überall da benutzen, wo der Vortheil einer eleganten Form den der Kürze überwiegt und dann

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

an die Stelle der Gleichung 1) treten lassen.

§. 2.

Die Differenzen der einfachsten Funktionen.

Um das im vorigen Paragraphen Gesagte durch einige Beispiele zu erläutern, wollen wir die Differenzen einer Anzahl von speziellen Funktionen entwickeln, und zwar wählen wir für die letzteren die einfachsten Funktionen, auf welche die Arithmetik und Geometrie hinführen.

Gehen wir von der Potenz aus, so bietet schon die einfache Gleichung

1) $$b^a = c$$

Gelegenheit zur Bildung von mehreren verschiedenen Funktionen. Da nämlich in ihr drei verschiedene Grössen vorkommen, so kann man immer je zwei von ihnen als veränderlich und die dritte als unveränderlich ansehen, und diess giebt drei verschiedene Hauptfälle, welche wir der Reihe nach betrachten wollen.

I. Ist a unveränderlich und ändern sich b und c, so kann man entweder $b = x$ und $c = y$ oder $b = y$ und $c = x$ setzen, wobei x immer die unabhängige Variabele bezeichnen möge. Man hat dann

$$x^a = y \text{ und } y^{a} = x;$$

entwickelt man aber y aus der zweiten Gleichung, so sind die beiden Funktionen

$$y = x^a \text{ und } y = x^{\frac{1}{a}}$$

nicht wesentlich von einander verschieden, denn beide heissen Potenzen und stehen unter dem gemeinschaftlichen Schema

2) $$y = x^{\mu}.$$

Daraus folgt sogleich: $\Delta y = (x + h)^{\mu} - x^{\mu}$, oder

Digitized by Google

3) $$\Delta y = x^{\mu}\left[(1+\frac{h}{x})^{\mu}-1\right].$$

II. Ist b unveränderlich, so kann entweder $a = x$ und $c = y$ oder $a = y$ und $c = x$ sein. Der erste Fall giebt die sogenannte Exponenzialgrösse b^x und für

4) $$y = b^x$$

findet man $$\Delta y = b^{x+h} - b^x$$ oder

5) $$\Delta y = (b^h - 1)b^x.$$

Der zweite Fall führt, wenn man die entstehende Gleichung $b^y = x$ nach y auflöst, zum Logarithmus, nämlich

6) $$y = log\, x \;, \;(\text{bas}.b)$$

und dann wird $$\Delta y = log(x+h) - log\, x$$ oder

7) $$\Delta y = log(1+\frac{h}{x}).$$

III. Für ein constantes c endlich erhält man, wenn zuerst $a = x$ und $b = y$ gesetzt wird

8) $$y^x = c \text{ oder } y = c^{\frac{1}{x}}$$

und folglich $$\Delta y = c^{\frac{1}{x+h}} - c^{\frac{1}{x}}$$

ferner für $a = y$ und $b = x$

$$x^y = c.$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen in dem Systeme mit der Basis c, so giebt diess $y\, log\, x = 1$ oder

9) $$y = \frac{1}{log\, x} \;, \;\text{bas}\, c$$

und hieraus findet man ohne Schwierigkeit

10) $$\Delta y = -\frac{log(1+\frac{h}{x})}{log\, x \,.\, log(x+h)}.$$

Eine weitere Quelle verschiedener Funktionen ist die Goniometrie, weil wir auch hier zusammengehörigen Paaren veränderlicher Grössen begegnen, wie z. B. Bogen und Sinus, Bogen und Tangente etc. Um aber nicht benannte und unbenannte Zahlen durch einander zu haben, wollen wir die Bögen sämmtlich in Theilen des Halbmessers ausgedrückt voraussetzen, so dass es in diesem Sinne zu jeder abstrakten Zahl a einen Sinus, Cosinus u. s. w. giebt. Die Reduktion

Digitized by Google

eines solchen unbenannten Bogens auf Grade geschieht leicht durch die Bemerkung, dass der Länge π der Bogen von 180° entspricht, dass mithin die Gradeanzahl g, welche zur Länge a gehört, mittelst der Proportion

$$\pi : a = 180^\circ : g^\circ$$

gefunden werden kann. — Eine Gleichung wie $b = \sin a$ giebt nun zunächst für $a = x$, $b = y$:

11) $$y = \sin x$$

mithin $\varDelta y = \sin(x+h) - \sin x$ oder unter Anwendung der bekannten Formel $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

12) $$\varDelta y = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Setzen wir dagegen $a = y$, $b = x$, so ist in der Gleichung $x = \sin y$ nunmehr y derjenige Bogen, dessen Sinus die Länge x hat. Da es aber solcher Bögen unzählig viele giebt, so wollen wir aus denselben nur den *kleinsten* hervorheben, d. h. dasjenige zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ enthaltene y, für welches $\sin y = x$ ist. Bezeichnen wir diesen Bogen mit $Arcsin\, x$, so wird

13) $$y = Arcsin\, x;$$

ferner $\varDelta y = Arcsin(x+h) - Arcsin\, x$, woraus man durch Anwendung der Formel *)

---

*) Wenn die Bögen u und v, von denen u der grössere sein möge, im ersten Quadranten liegen, und $\sin u = \alpha$, $\sin v = \beta$ ist, so folgt $\cos u = \sqrt{1-\alpha^2}$, $\cos v = \sqrt{1-\beta^2}$; die geometrische Formel

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$

verwandelt sich hierdurch in

$$\sin(u-v) = \alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Da aber unter den gemachten Voraussetzungen auch $u-v$ ein spitzer Bogen ist, so wird hieraus

$$u - v = Arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}).$$

Andererseits folgen aber wegen der dem u und v angewiesenen Gränzen aus $\sin u = \alpha$ und $\sin v = \beta$ die Gleichungen $u = Arcsin\,\alpha$, $v = Arcsin\,\beta$, durch deren Substitution die vorige Relation zwischen u, v, α und β in die oben citirte Formel übergeführt wird.

Digitized by Google

$$Arcsin\,\alpha - Arcsin\,\beta = Arcsin\,(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2})$$

sogleich die Differenz erhält

14) $$\varDelta y = Arcsin[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}].$$

In ganz derselben Weise entstehen aus der Gleichung $b = cos\,a$ zwei verschiedene Funktionen. Die erste ist

15) $$y = cos\,x$$

mit $\varDelta y = cos\,(x+h) - cos\,x$ oder unter Anwendung der Formel

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

16) $$\varDelta y = -2\,sin\frac{h}{2}\,.\,sin\,(x+\frac{h}{2}).$$

Die zweite hieher gehörende Funktion ist

17) $$y = Arccos\,x,$$

wobei wieder $Arccos\,x$ den kleinsten derjenigen Bögen bezeichnet, welche x zum Cosinus haben, oder y als Bogen des ersten Quadranten vorausgesetzt wird. Bemerkt man, dass dieser Definition zufolge

$$Arccos\,x = \frac{\pi}{2} - Arcsin\,x$$

ist, so hat man $\varDelta y = -[Arcsin\,(x+h) - Arcsin\,x]$ d. i. nach dem früheren

18) $$\varDelta y = -Arcsin[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}].$$

Aus der Gleichung $b = tan\,a$ entspringen ebenfalls zwei Funktionen, je nachdem man $a = x$ und $b = y$ oder $a = y$ und $b = x$ nimmt. Die erste dieser Funktionen ist

19) $$y = tan\,x$$

und wenn man hier die Differenz $\varDelta y = tan(x+h) - tan\,x$ mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$tan\,\alpha - tan\,\beta = \frac{sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta}$$

umwandelt, so wird

20) $$\varDelta y = \frac{sin\,h}{cos\,x\,.\,cos\,(x+h)}.$$

Im zweiten Falle $x = tan\,y$ folgt dagegen, wenn y als spitzer Bogen vorausgesetzt wird,

21) $$y = Arctan\,x,$$

Digitized by Google

und durch Anwendung der bekannten Formel *)

$$Arctan\,\alpha - Arctan\,\beta = Arctan\,\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$$

auf die Differenz $Arctan\,(x+h) - Arctan\,x$ wird jetzt

22) $$\Delta y = Arctan\,\frac{h}{1+x(x+h)}.$$

Gehen wir endlich von der Gleichung $b = cot\,a$ aus, so ist einerseits für $a = x$, $b = y$

23) $$y = cot\,x$$

und wenn wir für die Differenz $\Delta y = cot\,(x+h) - cot\,x$ die goniometrische Formel

$$cot\,\alpha - cot\,\beta = -\frac{sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta}$$

benutzen, so ergiebt sich

24) $$\Delta y = -\frac{sin\,h}{sin\,x\,.\,sin\,(x+h)}.$$

Andererseits giebt die Gleichung $b = cot\,a$ für $a = y$, $b = x$, wenn y als spitzer Bogen vorausgesetzt wird

25) $$y = Arccot\,x.$$

Berücksichtigt man hier, dass den Definitionen von $Arctan\,x$ und $Arccot\,x$ zufolge die Gleichung

$$Arccot\,x = \frac{\pi}{2} - Arctan\,x$$

statt findet, so hat man $\Delta y = -[Arctan\,(x+h) - Arctan\,x]$ oder

---

*) Für $tan\,u = \alpha$, $tan\,v = \beta$ verwandelt sich die goniometrische Formel

$$tan\,(u-v) = \frac{tan\,u - tan\,v}{1 + tan\,u\;tan\,v}$$

in

$$tan\,(u-v) = \frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}.$$

Sind u und v beide spitze Bögen und $u > v$, so ist auch $u - v$ ein Bogen des ersten Quadranten und mithin

$$u - v = Arctan\,\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}.$$

Andererseits folgen aber unter den gemachten Voraussetzungen aus den Gleichungen $tan\,u = \alpha$, $tan\,v = \beta$ die neuen Gleichungen $u = Arctan\,\alpha$, $v = Arctan\,\beta$, durch deren Substitution die vorige Beziehung zwischen u, v, α und β in die oben benutzte Formel übergeht.

Digitized by Google

26) $$\Delta y = -\,Arctan\,\frac{h}{1+x(x+h)}.$$

Die kleine Formelnsammlung, welche durch diese Betrachtungen zu Stande gekommen ist, wird man nun leicht zur Bildung von Beispielen für die späteren allgemeinen Theoreme der Differenzen und Summenrechnung benutzen können.

§. 3.

Die Differenzen zusammengesetzter Funktionen.

Sind die Funktionen nicht so einfach, dass man wie im vorigen Paragraphen ihre Differenzen unmittelbar entwickeln kann, sondern vielmehr aus einzelnen Funktionen zusammengesetzt, die man für sich wohl differenziren könnte, so entsteht die Frage, nach welchen Gesetzen sich die Differenz der Gesammtfunktion aus den Differenzen der einzelnen Bestandtheile zusammensetzt. Wir wollen diese Frage unter der Voraussetzung beantworten, dass die complizirtere Funktion mit Hülfe der vier Grundrechnungsarten aus anderen Funktionen gebildet ist.

I. Sei zunächst $f(x)$ eine Summe oder Differenz mehrer anderen Funktionen, also etwa

$$f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \chi(x) \pm \ldots\ldots$$

oder kürzer

1) $$y = u \pm v \pm w \pm \ldots\ldots$$

wobei man nur zu merken hat, dass $y, u, v, \ldots$ sämmtlich Funktionen einer unabhängigen Variabelen x bedeuten, so zieht die Aenderung des x eine gleichzeitige Aenderung von $y, u, v, w, \ldots$ nach sich. Geht also x in $x+h$ über, so treten $y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w, \ldots$ an die Stellen von $y, u, v, w, \ldots$ und es ist dann

$$y+\Delta y = (u+\Delta u) \pm (v+\Delta v) \pm (w+\Delta w) \pm \ldots.$$

hieraus folgt durch Subtraktion der Gleichung 1),

2) $$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \ldots\ldots$$

Schreibt man für y seinen Werth, so erkennt man aus der Gleichung

$$\Delta(u \pm v \pm w \pm \ldots.) = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \ldots.$$

Digitized by Google

dass sich das Zeichen Δ auf den Inhalt einer Parenthese ähnlich vertheilt wie ein gemeinschaftlicher Faktor, eine Analogie, die wir später weiter verfolgen werden.

II. Ist $f(x)$ ein Produkt aus zwei andern Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ also $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ oder

3) $$y = uv,$$

so folgt, wenn sich x um h ändert,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u . \Delta v$$

und durch Subtraktion der Gleichung 3)

4) $$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u . \Delta v.$$

Wäre einer der Faktoren u und v constant, etwa $v = k$, d. h. entsprächen den verschiedenen Werthen von x nicht verschiedene Werthe von v, sondern immer einer und derselbe k, so würde eine Aenderung des x keine Aenderung des v nach sich ziehen oder es wäre $\Delta v = o$. Aus

5) $$y = ku$$

folgt also dann

6) $$\Delta y = k\Delta u, \text{ oder } \Delta(ku) = k\Delta u.$$

Aus diesem und dem unter I. bewiesenen Satze lässt sich nun ein allgemeineres Theorem herleiten. Ist nämlich

7) $$y = Au + Bv + Cw + \ldots.$$

wo $A, B, C, \ldots$ beliebige positive oder negative von x unabhängige Zahlen, also relative Constanten bedeuten, so ergiebt sich

8) $$\Delta y = A\Delta u + B\Delta v + C\Delta w + \ldots.$$

III. Ist endlich $f(x)$ gleich einem Quotienten $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ oder

9) $$y = \frac{v}{u}$$

so wird durch Aenderung des x

$$y + \Delta y = \frac{v + \Delta v}{u + \Delta u}$$

und wenn man die Gleichung 9) davon subtrahirt unter Reduction auf gleichen Nenner

10) $$\Delta y = \frac{u\Delta v - v\Delta u}{u(u + \Delta u)}.$$

Digitized by Google

Diese Formel könnte z. B. dazu dienen, um aus den Differenzen von $\cos x$ und $\sin x$ die von $\tan x$ abzuleiten, indem man $u = \cos x$ und $v = \sin x$ setzte.

§. 4.

Differenzen höherer Ordnungen.

Da die Differenz einer Funktion von x immer wieder eine Funktion derselben Variabelen ist, so muss es offenbar möglich sein, die Operation des Differenzennehmens auf diese neue Funktion anzuwenden, das dabei erscheinende Resultat ebenfalls wieder zu differenziren u. s. f. überhaupt die gedachte Operation beliebig vielmal nach einander vorzunehmen. So giebt die Gleichung

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

wenn man beiderseits die Differenz nimmt

$$\Delta(\Delta y) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

wofür man kürzer zu schreiben pflegt

$$\Delta^2 y = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

Da man nun die Differenzen auf der rechten Seite entwickeln kann — es ist nämlich $\Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$ und $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ — so erfährt man hierdurch die Bedeutung der zweiten Differenz von y. Nochmalige Differenziation gäbe jetzt

$$\Delta(\Delta^2 y) = \Delta[\Delta f(x+h)] - \Delta[\Delta f(x)]$$

oder

$$\Delta^3 y = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x)$$

und da man vorhin die Bedeutung der zweiten Differenz kennen gelernt hat, so lässt sich die rechte Seite entwickeln und lehrt, was unter $\Delta^3 y$ zu verstehen sei. Wie man auf diese Weise weiter gehen kann, ist unmittelbar klar und es bedarf nun noch einer Untersuchung über das Gesetz, nach welchem sich die successiven Differenzen von y bilden.

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Funktionen

$$f(x+h)\ ,\ f(x+2h)\ ,\ f(x+3h)\ ,\ \ldots\ldots\ f(x+sh)$$

worin s eine positive ganze Zahl bedeutet, mit

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ \ldots\ldots\ y_s$$

Digitized by Google

so dass y_0 mit y einerlei sein würde, so gelten dem Begriffe der Differenz zufolge die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \Delta y = y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta y_{s-1} = y_s - y_{s-1} \end{cases}$$

Nimmt man die Differenz der ersten Gleichung, so wird

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$

oder

$$\Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y_0$$

hiervon ist wieder die Differenz

$$\Delta^3 y = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0$$
$$= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)$$

oder

$$\Delta^3 y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Eine nochmalige Anwendung derselben Operation würde zu der Gleichung

$$\Delta^4 y = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

führen und man sieht leicht, dass die allgemeine Form dieser Gleichung durch

$$\Delta^s y = y_s - A_1 y_{s-1} + A_2 y_{s-2} - \dots\dots \pm A_s y_0$$

ausgedrückt wird, worin $A_1, A_2, \dots A_s$ gewisse constante nur von s und ihrem Index abhängige Coeffizienten bezeichnen, deren Bildungsgesetz noch unbekannt ist. Ein Blick auf die bisherigen Coeffizienten

1 , 1

1 , 2 , 1

1 , 3 , 3 , 1

1 , 4 , 6 , 4 , 1

. . . .

führt aber auf die Vermuthung, dass $A_1, A_2, \dots A_s$ mit denjenigen Zahlen identisch sein könnten, welche angeben wie viele Combinationen zu je ein, zwei, drei ... s Elementen sich aus s Elementen bilden lassen, wonach

Digitized by Google

$$A_1 = \frac{s}{1},\ A_2 = \frac{s(s-1)}{1.2},\ A_3 = \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3},\ \ldots$$

sein müsste. Bezeichnen wir diese Zahlen mit $s_1, s_2, s_3, \ldots$ so wäre jetzt

$$\Delta^s y = y_s - s_1 y_{s-1} + s_2 y_{s-2} - \ldots.$$

Ob diese Annahme richtig sei oder nicht, muss eine neue Differenz zu erkennen geben. Man hat dann

$$\Delta^{s+1} y = \Delta y_s - s_1 \Delta y_{s-1} + s_2 \Delta y_{s-2} - \ldots.$$

oder wenn man auf jedes Glied recht den Satz $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ anwendet

$$\Delta^{s+1} y = (y_{s+1} - y_s) - s_1 (y_s - y_{s-1}) + s_2 (y_{s-1} - y_{s-2}) - \ldots.$$

d. i. durch Vereinigung der Glieder mit gleichen Faktoren

$$\Delta^{s+1} y = y_{s+1} - (1+s_1) y_s + (s_1+s_2) y_{s-1} \\ - (s_2+s_3) y_{s-2} + \ldots.$$

Man hat aber

$$s_n + s_{n+1}$$

$$= \frac{s(s-1)(s-2 \ldots (s-n+1)}{1.2.3 \ldots . n} + \frac{s(s-1)(s-2) \ldots . (s-n+1)(s-n)}{1.2.3 \ldots . n(n+1)}$$

$$= \frac{s(s-1)(s-2) \ldots . (s-n+1)}{1.2.3 \ldots . n} \left[1 + \frac{s-n}{n+1}\right]$$

$$= \frac{(s+1)s(s-1)(s-2) \ldots . (s-n+1)}{1.2.3 \ldots . (n+1)}$$

d. i. weil der letzte Ausdruck so aus $s+1$ gebildet ist wie s_{n+1} aus s

2) $s_n + s_{n+1} = (s+1)_{n+1}$

und wenn man diess in der Gleichung für $\Delta^{s+1} y$ benutzt, so wird

$$\Delta^{s+1} y = y_{s+1} - (s+1)_1 y_s + (s+1)_2 y_{s-1} - \ldots.$$

Das Nämliche würde man auch aus der Formel für $\Delta^s y$ erhalten haben, wenn man dort $s+1$ für s schriebe. Die Formel bleibt also für Δ^{s+1} richtig, wenn sie es für Δ^s war, und da sie für $s = 1$ gilt, so ist damit ihre Allgemeingültigkeit bewiesen. Wir haben demnach

3) $\Delta^s y = y_s - s_1 y_{s-1} + s_2 y_{s-2} - \ldots . + (-1)^s s_s y_0$

wofür man vermöge der Bedeutung von $y, y_1, y_2, \ldots$ auch die Gleichung

4) $\Delta^s f(x) = f(x+sh) - s_1 f(x+\overline{s-1}h) + s_2 f(x+\overline{s-2}h) - \ldots$
$\ldots\ldots + (-1)^s s_s f(x)$

substituiren könnte.

Digitized by Google

So hat man beispielsweis für $f(x) = b^x$,

$$\Delta^s b^x = b^{x+sh} - s_1 b^{x+(s-1)h} + s_2 b^{x+(s-2)h} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^s s_s b^x$$

oder

5) $$\Delta^s b^x = b^x[(b^h)^s - s_1 (b^h)^{s-1} + s_2(b^h)^{s-2} - \ldots + (-1)^s s_s].$$

Da man hier die auf der linken Seite vorkommende Differenz s^{ter} Ordnung auch unabhängig von der rechten Seite für sich entwickeln kann, so gelangt man hierdurch zum Beweise eines neuen Satzes. Es ist nämlich

$$\Delta b^x = (b^h - 1) b^x$$
$$\Delta^2 b^x = (b^h - 1)\Delta b^x = (b^h - 1)^2 b^x$$
$$\Delta^3 b^x = (b^h - 1)^2 \Delta b^x = (b^h - 1)^3 b^x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^s b^x = (b^h - 1)^{s-1} \Delta b^x = (b^h - 1)^s b^x$$

und folglich, wenn man diess in No. 5) substituirt,

$$(b^h - 1)^s = (b^h)^s - s_1 (b^h)^{s-1} + s_2 (b^h)^{s-2} - \ldots + (-1)^s s_s$$

oder wenn man $b^h = z$ setzt

$$(z - 1)^s = z^s - s_1 z^{s-1}) + s_2 z^{s-2} - \ldots + (-1)^s s_s$$

so dass also auch die Differenzenrechnung einen Beweis für den binomischen Lehrsatz bei ganzen positiven Exponenten liefern kann.

Nimmt man als zweites Beispiel für das Theorem 4) $f(x) = x^m$, wo m eine ganze positive Zahl bezeichnen möge, so wird

6) $$\Delta^s(x^m) = (x + sh)^m - s_1 (x + \overline{s-1}h)^m + s_2 (x + \overline{s-2}h)^m - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^s s_s x^m$$

Auch hier kann man wenigstens in einigen Fällen den Werth der linken Seite unabhängig von der Reihe rechts entwickeln und dadurch wieder zu einem neuen Satze gelangen. Es ist nämlich

$$\Delta(x^m) = (x+h)^m - x^m$$

oder wenn man auf $(x+h)^m$ den binomischen Satz anwendet

$$\Delta(x^m) = \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots$$

wofür wir kurz schreiben wollen

$$\Delta(x^m) = m x^{m-1} h + A_1 x^{m-2} h^2 + B_1 x^{m-3} h^3 + \ldots\ldots$$

Hieraus ergiebt sich nun weiter

Digitized by Google

$$\Delta^2(x^m) = mh\Delta(x^{m-1}) + A_1 h^2 \Delta(x^{m-2}) + B_1 h^3 \Delta(x^{m-3}) + \ldots.$$

d. i. wenn man für jedes einzelne Glied das vorhin Gefundene benutzt

$$\begin{aligned}\Delta^2(x^m) = mh&[(m-1)x^{m-2}h + \frac{(m-1)(m-2)}{2}x^{m-3}h^2 + \ldots]\\ &+ A_1 h^2[(m-2)x^{m-3}h + \frac{(m-2)(m-3)}{2}x^{m-4}h^2 + \ldots]\\ &+ B_1 h^3[(m-3)x^{m-4}h + \frac{(m-3)(m-4)}{2}x^{m-5}h^2 + \ldots]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Indem man hier diejenigen Glieder vereinigt, welche gleiche Potenzen von x enthalten, erkennt man leicht, dass sich die zweite Differenz von x^m unter die Form stellt

$$\Delta^2(x^m) = m(m-1)x^{m-2}h^2 + A_2 x^{m-3}h^3 + B_2 x^{m-4}h^4 + \ldots.$$

Hiervon ist nun weiter die Differenz

$$\begin{aligned}\Delta^3(x^m) = m(m-1)h^2\Delta(x^{m-2}) &+ A_2 h^3 \Delta(x^{m-3})\\ &+ B_2 h^4 \Delta(x^{m-4}) + \ldots..\end{aligned}$$

und wenn man die Differenzen auf der rechten Seite entwickelt, so erhält man ein Resultat von der Form

$$\begin{aligned}\Delta^3(x^m) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 &+ A_3 x^{m-4}h^4\\ &+ B_3 x^{m-5}h^5 + \ldots.\end{aligned}$$

Wie man auf diese Weise weiter gehen kann, erhellt von selbst und zugleich erkennt man, dass mit jeder neuen Differenz eine Erniedrigung der Potenzen von x eintritt. Da andererseits auch leicht einzusehen ist, dass keine negativen Potenzen von x vorkommen können, so erkennt man hieraus zusammen die Richtigkeit der Gleichung

$$\Delta^m(x^m) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{m-1})x^{m-m}h^m,$$

welcher zufolge die $m$te Differenz von x^m sich auf eine von x unabhängige oder constante Grösse reduzirt. Man hat dann weiter

$$\Delta^{m+1}(x^m) = 0\,,\ \Delta^{m+2}(x^m) = 0\,,\ \ldots \text{ u. s. f.}$$

Es ist daher leicht, den Werth von $\Delta^s(x^m)$ für die zwei Fälle anzugeben, wo s entweder $= m$ oder $> m$ ausfällt, nämlich

$$\begin{aligned}\Delta^s(x^m) &= 1.2.3\ldots m.h^m \quad \text{für } s = m\\ &= 0 \quad \text{für } s > m.\end{aligned}$$

Diesen zwei besonderen Fällen entsprechend giebt nun die Gleichung 6) für $s = m$

Digitized by Google

7) $$1.2.3 \ldots m.h^m$$
$$= (x+mh)^m - m_1(x+\overline{m-1}\,h)^m + m_2(x+\overline{m-2}\,h)^m - \ldots\ldots$$
und für $s > m$

8) $$0 = (x+sh)^m - s_1(x+\overline{s-1}\,h)^m + s_2(x+\overline{s-2}\,h)^m - \ldots.$$
für $x = 0$ erhält man daraus die beiden speziellen Sätze
$$1.2.3 \ldots m = m^m - m_1(m-1)^m + m_2(m-2)^m - \ldots.;$$
und
$$0 = s^m - s_1(s-1)^m + s_2(s-2)^m - s_3(s-3)^m + \ldots.$$
wobei aber $s > m$ sein muss. Nimmt man dagegen in No. 7) $x = 1$, $h = 1$, $m = p-1$, so ergiebt sich die gleichfalls bemerkenswerthe Spezialisirung *)
$$1.2.3 \ldots (p-1)$$
$$= p^{p-1} - (p-1)_1(p-1)^{p-1} + (p-1)_2(p-2)^{p-1} - (p-1)_3(p-3)^{p-1} + \ldots.$$
Als drittes Beispiel für die Formel 3) oder 4) benutzen wir die Annahme $f(x) = \sin x$; es ist dann

9) $$\Delta^s \sin x$$
$$= \sin(x+sh) - s_1 \sin(x+\overline{s-1}\,h) + s_2 \sin(x+\overline{s-2}\,h) \ldots..$$

---

*) In den Zusätzen zu *Bossut's* Algebra (1776) leitet *Laplace* hieraus das *Wilson*'sche Theorem über Primzahlen auf folgende Weise ab. Da $1 = (p-1)_1 - (p-1)_2 + (p-1)_3 - \ldots$ ist, so hat man
$$1.2.3 \ldots (p-1) + 1$$
$$= p^{p-1} - (p-1)_1\,[(p-1)^{p-1} - 1] + (p-1)_2\,[(p-2)^{p-1} - 1]$$
$$- (p-1)_3\,[(p-3)^{p-1} - 1] + \ldots.$$
Zufolge des *Fermat*'schen Satzes ist aber $a^{p-1} - 1$ immer durch p ohne Rest theilbar, sobald p eine Primzahl und a kein Vielfaches von p ist. Daraus ersieht man, dass jedes Glied der Reihe rechts durch p aufdividirt werden kann und ein Resultat von der Form
$$\frac{1.2.3 \ldots (p-1) + 1}{p} = p^{p-2} - (p-1)_1 G_1 + (p-1)_2 G_2 - \ldots.$$
giebt, worin $G_1, G_2, G_3, \ldots$ positive ganze Zahlen bedeuten. Da aber die Binomialkoeffizienten $(p-1)_1, (p-1)_2$ etc. immer ganze Zahlen sind, so erkennt man, dass die rechte Seite eine ganze Zahl ausmacht. Da nun dasselbe für die linke Seite gelten muss, so folgt, dass $1.2.3 \ldots (p-1) + 1$ jederzeit durch p aufgeht, wenn p eine Primzahl ist, und hierin besteht das Theorem von *Wilson*.

Digitized by Google

Andererseits hat man aber

$$\Delta \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\,.\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$\Delta^2 \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\,.\,\Delta\cos(x+\frac{h}{2})$$

oder wenn man die Differenz auf der rechten Seite nach der Formel für $\Delta\cos x$ entwickelt, indem man $x+\frac{h}{2}$ an die Stelle von x setzt

$$\Delta^2 \sin x = -(2\sin\frac{h}{2})^2 \sin(x+\frac{2h}{2}).$$

Man findet dann weiter

$$\Delta^3 \sin x = -(2\sin\frac{h}{2})^2\,\Delta\sin(x+\frac{2h}{2})$$

oder

$$\Delta^3 \sin x = -(2\sin\frac{h}{2})^3 \cos(x+\frac{3h}{2})$$

$$\Delta^4 \sin x = +(2\sin\frac{h}{2})^4 \sin(x+\frac{4h}{2})$$

$$\Delta^5 \sin x = +(2\sin\frac{h}{2})^5 \sin(x+\frac{5h}{2})$$

. . . .

und mit einiger Aufmerksamkeit wird man leicht bemerken, dass der Zeichenwechsel nach dem Schema

$$+\,,\,-\,,\,-\,,\,+\,,\,+\,-\,,\,-\,,\,+\,,\,+\,,\,\ldots.$$

vor sich geht. Berücksichtigt man noch, dass eine Reihe wie

$$+\cos z_1\,,\,-\sin z_2\,,\,-\cos z_3\,,\,+\sin z_4\,,\,+\cos z_5\,,\,-\ldots$$

unter der Form

$$\sin(\frac{\pi}{2}+z_1)\,,\,\sin(\frac{2\pi}{2}+z_2)\,,\,\sin(\frac{3\pi}{2}+z_3)\,,\,\sin(\frac{4\pi}{2}+z_4)\,,\,\ldots..$$

dargestellt werden kann, also das s^{te} Glied derselben durch $\sin(\frac{s\pi}{2}+z_s)$ ausgedrückt wird, so erhält man

$$10)\quad \Delta^s \sin x = (2\sin\frac{h}{2})^s \sin(x+s\frac{\pi+h}{2})$$

und durch Vergleichung mit No. 9) gelangt man zu der Summenformel

$$11)\qquad (2\sin\frac{h}{2})^s \sin(x+s\frac{\pi+h}{2})$$

$$= \sin(x+sh) - s_1\sin(x+\overline{s-1}h) + s_2\sin(x+\overline{s-2}h) - \ldots..$$

Ganz ähnlich lässt sich die Betrachtung für die Spezialisirung $f(x) = \cos x$ durchführen. Die Formel 4) giebt nämlich

Digitized by Google

12) $$\Delta^s \cos x$$
$$= \cos(x+sh) - s_1 \cos(x+\overline{s-1}h) + s_2 \cos(x+\overline{s-2}h) - \ldots..$$
Andererseits ist aber unmittelbar

$$\Delta \cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})$$

$$\Delta^2 \cos x = -(2\sin\frac{h}{2})^2 \cos(x+\frac{2h}{2})$$

$$\Delta^3 \cos x = +(2\sin\frac{h}{2})^3 \sin(x+\frac{3h}{2})$$

$$\Delta^4 \cos x = +(2\sin\frac{h}{2})^4 \cos(x+\frac{4h}{2})$$

Da man aber eine Reihe von der Form

$$-\sin z_1,\quad -\cos z_2,\quad +\sin z_3,\quad +\cos z_4,\quad -\ldots..$$

unter der bessern Gestalt

$$\cos(\frac{\pi}{2}+z_1)\ ,\ \cos(\frac{2\pi}{2}+z_2)\ ,\ \cos(\frac{3\pi}{2}+z_3)\ ,\ \cos(\frac{4\pi}{2}+z_4)\ ,\ \ldots..$$

darstellen kann und folglich das s^{te} Glied dieser Reihe durch

$$\cos(\frac{s\pi}{2}+z_s)$$

ausgedrückt wird, so übersieht man sogleich die Richtigkeit der Formel

13) $$\Delta^s \cos x = (2\sin\frac{h}{2})^s \cos(x+s\frac{\pi+h}{2})$$

aus deren Vergleichung mit No. 12) die nachstehende Reihensummirung resultirt:

14) $$(2\sin\frac{h}{2})^s \cos(x+s\frac{\pi+h}{2})$$
$$= \cos(x+sh) - s_1 \cos(x+\overline{s-1}h) + s_2 \cos(x+\overline{s-2}h) - \ldots..$$
welche der in No. 11) entwickelten vollkommen analog ist.

§. 5.

Umkehrung des im vorigen Paragraphen behandelten Problemes.

Formulirt man die Aufgabe, mit welcher wir uns im vorigen Paragraphen beschäftigt haben, folgendermassen: „irgend eine der Dif-

Digitized by Google

ferenzen Δy , $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... etwa $\Delta^s y$ durch die Funktionen y_0 , y_1 , y_2 , ... auszudrücken," so erkennt man bei nur geringer Aufmerksamkeit, dass sich diesem Probleme das umgekehrte gegenüber stellen lässt: „irgend eine der Funktionen y_0 , y_1 , y_2 , ... etwa y_s durch die Differenzen Δy , $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... auszudrücken." Die Lösung desselben ist sehr leicht, wenn man die Gleichungen 1) des vorigen Paragraphen in der Form

$$1)\quad \begin{cases} y_1 = y + \Delta y \\ y_2 = y_1 + \Delta y_1 \\ y_3 = y_2 + \Delta y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_s = y_{s-1} + \Delta y_{s-1} \end{cases}$$

schreibt und jede in die darauf folgende substituirt. Diess giebt folgende einfache Rechnung

$$\begin{aligned} y_2 &= (y + \Delta y) + \Delta(y + \Delta y) \\ &= y + 2\Delta y + \Delta^2 y \\ y_3 &= (y + 2\Delta y + \Delta^2) + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) \\ &= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \end{aligned}$$

u. s. f.

Da hier dieselben Coefficienten auftreten, denen wir schon im vorigen Paragraphen begegneten, so dürfen wir vermuthen, dass

$$y_s = y + s_1 \Delta y + s_2 \Delta^2 y + \dots\dots + s_s \Delta^s y$$

sein werde. Die Richtigkeit dieser noch problematischen Gleichung zeigt sich sogleich, wenn man mit Hülfe der Gleichung $y_{s+1} = y_s + \Delta y_s$ einen Schritt weiter geht. Es müsste nämlich sein

$$\begin{aligned} y_{s+1} = y &+ s_1 \Delta y + s_2 \Delta^2 y + \dots\dots + s_s \Delta^s y \\ &+ \Delta y + s_1 \Delta^2 y + \dots\dots + s_{s-1} \Delta^s y + s_s \Delta^{s+1} y \end{aligned}$$

Unter Anwendung des Satzes $s_n + s_{n+1} = (s+1)_{n+1}$ und unter der Rücksicht, dass $s_s = (s+1)_{s+1} = 1$ ist, erhält man jetzt

$$y_{s+1} = y + (s+1)_1 \Delta y + (s+1)_2 \Delta^2 y + \dots. + (s+1)_{s+1} \Delta^{s+1} y.$$

Zu derselben Gleichung würde man auch gelangt sein, wenn man in der Formel für y_s unmittelbar $s + 1$ an die Stelle von s gesetzt hätte; jene problematische Formel findet also in dem Schlusse von s auf $s + 1$ ihren Beweis. Die Gleichung

Digitized by Google

2) $y_s = y + s_1 \Delta y + s_2 \Delta^2 y + s_3 \Delta^3 y + \ldots + s_s \Delta^s y$

lässt sich übrigens in einer sehr compendiösen Gestalt darstellen, wenn man sich die Fiktion erlaubt, in $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ etc. die Ordnungsindices 2, 3, ... als Exponenten und y als gemeinschaftlichen Faktor anzusehen; man hat dann sehr kurz

3) $$y_s = (1+\Delta)^s y$$

was der blosen äusseren Form nach mit 2) übereinstimmt, sobald man $(1+\Delta)^s$ auflöst, wobei man aber nie vergessen darf, dass in den einzelnen Gliedern der so entstehenden Reihe der Sinn von Δy, $\Delta^2 y$ etc. zu ändern ist. Gleichungen der Art, welche mit anderen Formeln identisch, der Bedeutung nach aber von diesen verschieden sind, hat man etwas unpassend symbolische genannt, so dass also No. 3) eine symbolische Darstellung von No. 2) wäre. — Schreibt man die Gleichung 2) in der Gestalt

$$f(x+sh) = f(x) + \frac{s}{1}\Delta f(x) + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 f(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(x) + \ldots$$

und setzt noch $sh = \varepsilon$, wo ε ein Vielfaches von h ist, so hat man auch wegen $s = \frac{\varepsilon}{h}$

4) $$f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1}\frac{\Delta f(x)}{h} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)(\varepsilon-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 f(x)}{h^3} + \ldots$$

Die Reihe ist so weit fortzusetzen, bis sie von selbst abbricht, was nothwendig einmal geschehen muss, weil unter den Grössen $h, 2h, 3h$ auch ein Vielfaches von h vorkommen muss, welches ε gleich ist.

Will man die Formel 2) auf irgend einen speziellen Fall anwenden, so setzt diess voraus, dass man sämmtliche Differenzen $\Delta y, \Delta^2 y$, ... $\Delta^s y$ wirklich entwickeln könne; da aber die Anzahl dieser Differenzen und die Ordnung der höchsten von ihnen mit s gleichzeitig wachsen, so ersieht man von selbst, dass für ein einigermassen grosses s die Darstellung von y_s sehr umfangreich und beschwerlich ausfallen wird und zwar besonders dann, wenn die successiven Differenzen sich

Digitized by Google

nicht nach einem leicht übersehbaren Gesetze bilden. Wir versuchen daher den Bedarf an Differenzen zu verringern und stellen uns die Aufgabe, y_s durch eine vorgeschriebene Anzahl von Differenzen, etwa durch $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots \Delta^n y$ auszudrücken, wobei $n < s$ sein soll.

Stellt man die Gleichung 2) in der folgenden Form dar

5) $y_s = y + s_1 \Delta y + s_2 \Delta^2 y + \ldots + s_{n-1} \Delta^{n-1} y + R_n$

worin R_n zur Abkürzung dient, nämlich

6) $R_n = s_n \Delta^n y + s_{n+1} \Delta^{n+1} y + s_{n+2} \Delta^{n+2} y + \ldots, + s_s \Delta^s y$

so übersieht man auf der Stelle, dass unsere Aufgabe sich darauf reduzirt, aus R_n die Differenzen $\Delta^{n+1} y$, $\Delta^{n+2} y$ etc. herauszuschaffen. Die Transformation, welche hierzu dient, ist am leichtesten einzusehen wenn man zuerst die einfacheren Fälle betrachtet, in welchen R_n aus nur zwei, drei, vier Gliedern u. s. w. besteht, also $n = s-1$, $s-2$, $s-3$, ... ist. Man hat dann

$$R_{s-1} = s_{s-1} \Delta^{s-1} y + s_s \Delta^s y$$

oder wegen des bekannten Satzes $s_{s-m} = s_m$,

$$R_{s-1} = s_1 \Delta^{s-1} y + \Delta^{s-1}(\Delta y)$$
$$= s_1 \Delta^{s-1} y_0 + \Delta^{s-1}(y_1 - y_0)$$

und wenn man die Glieder mit gleichen Differenzen vereinigt

$$R_{s-1} = (s-1)\Delta^{s-1} y_0 + \Delta^{s-1} y_1.$$

Man hat nun weiter

$$R_{s-2} = s_{s-2} \Delta^{s-2} y + s_{s-1} \Delta^{s-1} y + s_s \Delta^s y$$
$$= s_2 \Delta^{s-2} y + R_{s-1}$$

und wenn man für R_{s-1} die zweite Form setzt

$$R_{s-2} = s_2 \Delta^{s-2} y_0 + (s-1)\Delta^{s-1} y_0 + \Delta^{s-1} y_1.$$

Da aber $\Delta^{s-1} y_0 = \Delta^{s-2}(\Delta y_0) = \Delta^{s-2}(y_1 - y_0)$ und ganz ähnlich $\Delta^{s-1} y_1 = \Delta^{s-2}(\Delta y_1) = \Delta^{s-2}(y_2 - y_1)$ ist, so kann man auch

$$R_{s-2} = s_2 \Delta^{s-2} y_0 + (s-1)(\Delta^{s-2} y_1 - \Delta^{s-2} y_0) + (\Delta^{s-2} y_2 - \Delta^{s-2} y_1)$$

setzen und daraus findet man vermöge des Werthes von s_2 und durch Vereinigung alles Dessen, was sich vereinigen lässt,

$$R_{s-2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} \Delta^{s-2} y_0 + (s-2)\Delta^{s-2} y_1 + \Delta^{s-2} y_2.$$

Um R_{s-3} zu transformiren, brauchte man blos zu bemerken, dass

$$R_{s-3} = s_{s-3} \Delta^{s-3} y + R_{s-2}$$

Digitized by Google

oder vermöge der zweiten Form von R_{s-2}

$$R_{s-3} = s_3 \Delta^{s-3} y_0 + \frac{(s-1)(s-2)}{2} \Delta^{s-2} y_0 + (s-2)\Delta^{s-2} y_1 + \Delta^{s-2} y_2$$

ist, wo man die $(s-2)^{\text{ten}}$ Differenzen rechts durch die $(s-3)^{\text{ten}}$ ausdrücken kann; man erhält so

$$R_{s-3} = \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{2.3} \Delta^{s-3} y_0 + \frac{(s-2)(s-3)}{2} \Delta^{s-3} y_1 + (s-3)\Delta^{s-3} y_2 + \Delta^{s-3} y_3$$

Vergleicht man nun die transformirten Werthe von R_{s-1}, R_{s-2}, R_{s-3} mit einander, so scheint sich darin folgendes Gesetz auszusprechen:

$$R_{s-p} = (s-1)_p \Delta^{s-p} y_0 + (s-2)_{p-1} \Delta^{s-p} y_1 + (s-3)_{p-2} \Delta^{s-p} y_2 + \ldots\ldots + (s-p)_1 \Delta^{s-p} y_{p-1} + \Delta^{s-p} y_p$$

worin p eine positive ganze Zahl $< s$ bezeichnet und die kurze Ausdrucksweise der Binominalkoeffizienten angewendet ist. Als Controle für die Richtigkeit dieser Annahme wird nun der Schluss von p auf $p+1$ dienen. Man hat nämlich unmittelbar

$$R_{s-p-1} = s_{s-p-1} \Delta^{s-p-1} y + s_{s-p} \Delta^{s-p} y + s_{s-p+1} \Delta^{s-p+1} y + \ldots\ldots + s_s \Delta^s y$$

d. h. wegen $s_{s-p-1} = s_{p+1}$ und vermöge der ursprünglichen Form von R_{s-p}

$$R_{s-p-1} = s_{p+1} \Delta^{s-p-1} y_0 + R_{s-p}$$

oder zufolge der zweiten Form von R_{s-p}

$$R_{s-p-1} = s_{p+1} \Delta^{s-p-1} y_0 + (s-1)_p \Delta^{s-p} y_0 + (s-2)_{p-1} \Delta^{s-p} y_1 + \ldots\ldots + (s-p)_1 \Delta^{s-p} y_{p-1} + \Delta^{s-p} y_p.$$

Wendet man die Bemerkung, dass überhaupt

$$\Delta^{s-p} y_m = \Delta^{s-p-1}(\Delta y_m) = \Delta^{s-p-1}(y_{m+1} - y_m) = \Delta^{s-p-1} y_{m+1} - \Delta^{s-p-1} y_m$$

auf die einzelnen Glieder der obigen Reihe, mit Ausnahme des ersten, an und reduzirt so die $(s-p)^{\text{ten}}$ Differenzen auf die $(s-p-1)^{\text{ten}}$, so wird

$$\begin{aligned} R_{s-p-1} = {} & s_{p+1} \Delta^{s-p-1} y_0 \\ & + (s-1)_p [\Delta^{s-p-1} y_1 - \Delta^{s-p-1} y_0] \\ & + (s-2)_{p-1} [\Delta^{s-p-1} y_2 - \Delta^{s-p-1} y_1] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (s-p)_1 [\Delta^{s-p-1} y_p - \Delta^{s-p-1} y_{p-1}] \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+ \; [\Delta^{s-p-1}y_{p+1} \; - \; \Delta^{s-p-1}y_p]$$

und durch Vereinigung gleichnamiger Glieder

$$\begin{aligned} R_{s-p-1} = \; & [s_{p+1} - (s-1)_p]\Delta^{s-p-1}y_0 \\ & + [(s-1)_p - (s-2)_{p-1}]\Delta^{s-p-1}y_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [(s-p)_1 - 1]\Delta^{s-p-1}y_p \\ & + \Delta^{s-p-1}y_{p+1}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form der eingeklammerten Differenzen ist hier, wenn r eine ganze positive Zahl bedeutet

$$(s-r)_{p-r-1} - (s-r-1)_{p-r}$$

und diese kann man mit Hülfe des bekannten Satzes

$$q_m + q_{m+1} = (q+1)_{m+1} \text{ oder } (q+1)_{m+1} - q_m = q_{m+1}$$

in einen einzigen Binomialkoeffizienten, nämlich für $q+1 = s-r$, $m = p-r$, in

$$(s-r-1)_{p-r+1}$$

zusammenziehen. Man erhält dann

$$R_{s-p-1} = (s-1)_{p+1}\Delta^{s-p-1}y_0 + (s-2)_p\Delta^{s-p-1}y_1 + \ldots.$$
$$\ldots.. + (s-p-1)_1\Delta^{s-p-1}y_p + \Delta^{s-p-1}y_{p+1}$$

also Dasselbe, was man aus R_{s-p} bekommen würde, wenn man darin $p+1$ an die Stelle von p setzte. Die für $s-p$ angenommene Form erweist sich hierdurch als richtig und giebt für $s-p = n$ oder $p = s-n$,

7) $R_n = (s-1)_{s-n}\Delta^n y_0 + (s-2)_{s-n-1}\Delta^n y_1 + (s-3)_{s-n-2}\Delta^n y_2 + \ldots.$
$$\ldots.. + (s-\overline{s-n})_1\Delta^n y_{s-n-1} + \Delta^n y_{s-n}.$$

Wendet man noch den Satz $q_{q-m} = q_m$ auf jeden einzelnen rechts vorkommenden Binomialkoeffizienten an, so ist für

8) $y_s = y + s_1\Delta y + s_2\Delta^2 y + \ldots + s_{n-1}\Delta^{n-1}y + R_n$

9) $R_n = (s-1)_{n-1}\Delta^n y_0 + (s-2)_{n-1}\Delta^n y_1 + (s-3)_{n-1}\Delta^n y_2 + \ldots..$
$$\ldots.. + n_{n-1}\Delta^n y_{s-n-1} + (n-1)_{n-1}\Delta^n y_{s-n}$$

und hiermit hat unsere Aufgabe ihre Lösung gefunden, da auf der rechten Seite keine höhere Differenz als die n^{ter} Ordnung vorkommt.

§. 6.

Digression über das Theorem von Taylor.

Giebt man dem so eben entwickelten Satze die Form

$$1) \qquad f(x+sh)$$

$$= f(x) + \frac{s}{1} \Delta f(x) + \frac{s(s-1)}{1.2} \Delta^2 f(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3} \Delta^3 f(x) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-\overline{n-1}+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \Delta^{n-1} f(x) + R_n$$

und setzt darauf $sh = \varepsilon$ also $s = \frac{\varepsilon}{h}$, so erhält man

$$2) \qquad f(x+\varepsilon)$$

$$= f(x) + \frac{\varepsilon}{1} \frac{\Delta f(x)}{h} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)}{1.2} \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)(\varepsilon-2h)}{1.2.3} \frac{\Delta^3 f(x)}{h^3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)(\varepsilon-2h)\ldots(\varepsilon-\overline{n-2}h)}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{h^{n-1}} + R_n$$

und hier muss nun ε ein Vielfaches von h sein. Diese Beschränkung liesse sich wegschaffen, wenn man h unendlich abnehmend dächte, denn jede Zahl, gleichviel ob rational oder irrational, lässt sich als der Gränzwerth eines Produktes sh ansehen, wovon der eine Faktor s in's Unendliche zu- und der andere in's Unendliche abnimmt *). Setzt man die Gränzwerthe

$$Lim \frac{\Delta f(x)}{h} = f'(x)$$

$$Lim \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = f''(x)$$

$$Lim \frac{\Delta^3 f(x)}{h^3} = f'''(x) \text{ u. s. f.}$$

---

*) So ist z. B. $\sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$ d. h. $\sqrt{2}$ ist der Gränzwerth der Produkte

$$14 . \frac{1}{10}\,,\ 141 . \frac{1}{100}\,,\ 1414 . \frac{1}{1000}\,,\ 14142 . \frac{1}{10000}\,,\ \ldots\ldots$$

in welchen der erste Faktor eine fortwährend wachsende, der andere eine ebenso unausgesetzt abnehmende Grösse darstellt. Aehnlich verhält sich die Sache in jedem anderen Falle.

Digitized by Google

so sind $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. bekanntlich nichts Anderes als die successiven Differenzialquotienten von $f(x)$ und wenn man nun auch in den Koeffizienten k bis zur Null abnehmen lässt, so ist

$$3) \qquad f(x+\varepsilon)$$

$$= f(x) + \frac{\varepsilon}{1} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f''(x) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots..$$

$$\ldots.. + \frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + Lim\, R_n$$

und hier kommt es nun noch auf die Bestimmung von $Lim\, R_n$ an. Nennen wir S die Summe der Coeffizienten $(s-1)_{n-1}$, $(s-2)_{n-1}$, $(s-3)_{n-1}$ etc., so ist offenbar

$$R_n = S \frac{(s-1)_{n-1} \Delta^n y_0 + (s-2)_{n-1} \Delta^n y_1 + \ldots.. + (n-1)_{n-1} \Delta^n y_{s-n}}{(s-1)_{n-1} + (s-2)_{n-1} + \ldots.. + (n-1)_{n-1}}.$$

Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit den Werth von S zu finden, denn setzt man für jeden einzelnen der Binomialkoeffizienten $(s-1)_{n-1}$, $(s-2)_{n-1}$, ... seinen Werth, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$S = (s\text{-}1)_{n-1} \left[1 + \frac{s\text{-}n}{s\text{-}1} + \frac{(s\text{-}n)(s\text{-}n\text{-}1)}{(s\text{-}1)(s\text{-}2)} + \frac{(s\text{-}n)(s\text{-}n\text{-}1)(s\text{-}n\text{-}2)}{(s\text{-}1)(s\text{-}2)(s\text{-}3)} + \ldots.. \right]$$

wobei die eingeklammerte Reihe soweit fortzusetzen ist, bis sie von selbst abbricht und folglich $s-n+1$ Glieder besitzt. Bezeichnen nun a_0 , a_1 , a_2 ... a_m und b_0 , b_1 , b_2 ... b_m irgend welche Grössen, so ist identisch

$$\frac{b_0\, b_1\, b_2 \ldots..\, b_m}{a_0\, a_1\, a_2 \ldots..\, a_m}$$

$$= 1 + \frac{b_0 - a_0}{a_0} + \frac{b_1 - a_1}{a_1} \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_2 - a_2}{a_2} \frac{b_0\, b_1}{a_0\, a_1} + \ldots..$$

$$\ldots.. + \frac{b_m - a_m}{a_m} \frac{b_0\, b_1\, b_2 \ldots..\, b_{m-1}}{a_0\, a_1\, a_2 \ldots..\, a_{m-1}}$$

was man leicht dadurch verifiziren kann, dass man jedes Glied der rechten Seite in seine Bestandtheile zerlegt. Für $a_0 = s$, $a_1 = s-1$, $a_2 = s-2$, ... $b_0 = s-n$, $b_1 = s-n-1$, $b_2 = s-n-2$ etc. ergiebt sich hieraus

$$\frac{(s-n)(s-n-1)(s-n-2) \ldots. (s-n-m)}{(s-1)(s-2)(s-3) \ldots. (s-m)}$$

$$= 1 - \frac{n}{s} - \frac{n}{s-1}\,\frac{s-n}{s} - \frac{n}{s-2}\,\frac{(s-n)(s-n-1)}{s(s-1)} - \dots\dots$$

$$\dots\dots - \frac{n}{s-m}\,\frac{(s-n)(s-n-1)\,\dots\dots\,(s-n-m+1)}{s(s-1)(s-2)\,\dots\dots\,(s-m+1)}$$

wobei die Reihe rechts $m+2$ Glieder besitzt. Nimmt man die ganze Zahl $m = s-n$, so wird

$$0 = 1 - \frac{n}{s}\left[1 + \frac{s-n}{s-1} + \frac{(s-n)(s-n-1)}{(s-1)(s-2)} + \dots\dots \right.$$

$$\left. \dots\dots + \frac{(s-n)(s-n-1)\,\dots\,2.1}{s(s-1)(s-2)\,\dots\,(n+1)}\right]$$

und folglich

$$\frac{s}{n} = 1 + \frac{s-n}{s-1} + \frac{(s-n)(s-n-1)}{(s-1)(s-2)} + \frac{(s-n)(s-n-1)(s-n-2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \dots$$

womit die Summe der in Rede stehenden $(s-n+1)$gliedrigen Reihe gefunden ist. Diess giebt dann

$$S = (s-1)_{n-1}\,\frac{s}{n} = s_n$$

und dem Werthe von R_n zufolge

$$R_n = s_n\,\frac{(s-1)_{n-1}\,\Delta^n y_0 + (s-2)_{n-1}\,\Delta^n y_1 + \dots + (n-1)_{n-1}\,\Delta^n y_{s-n}}{(s-1)_{n-1} + (s-2)_{n-1} + \dots + (n-1)_{n-1}}$$

Es lassen sich nun leicht zwei Gränzen angeben, zwischen denen der Werth von R_n enthalten sein muss. Bezeichnen wir nämlich eine Zahl, welche zwischen der grössten und kleinsten unter den Zahlen α, β, γ, ... λ enthalten ist, mit $M(\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda)$, so dass also, wenn γ die grösste und $\varkappa$ die kleinste jener Zahlen bezeichnet, immer die Ungleichung

$$\gamma > M(\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda) > \varkappa$$

statt findet, so gilt der folgende für unsere Untersuchung besonders brauchbare Satz *)

---

*) Ist nämlich γ der grösste und $\varkappa$ der kleinste unter den Quotienten $\frac{B_0}{A_0}$, $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, ... $\frac{B_m}{A_m}$, so gelten die Beziehungen

$$\gamma > \frac{B_0}{A_0} > \varkappa$$

Digitized by Google

$$\frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots. + B_m}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots. + A_m}$$
$$= M\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \ldots. \frac{B_m}{A_m}\right)$$

in welchem A_0, A_1, A_2, ... A_m und B_0, B_1, B_2, ... B_m ganz beliebige Grössen bezeichnen. Hieraus folgt nun sogleich in der Anwendung auf R_n

$$R_n = s_n M(\varDelta^n y_0 , \varDelta^n y_1 , \varDelta^n y_2 , \ldots \varDelta^n y_{s-n})$$

Substituiren wir auch hier $\frac{\varepsilon}{h}$ für s und $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, etc. für y_0, y_1, y_2, ... so wird

$$R_n = \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)(\varepsilon-2h) \ldots (\varepsilon-\overline{n-1}h)}{1.2.3 \ldots n.h^n}$$
$$\times M[\varDelta^n f(x) , \varDelta^n f(x+h) , \varDelta^n f(x+2h) , \ldots \varDelta^n f(x+\overline{s-n}h)]$$

wofür man vermöge der Bedeutung von M und wegen $sh = \varepsilon$ auch schreiben kann

$$R_n = \frac{\varepsilon(\varepsilon-h)(\varepsilon-2h) \ldots (\varepsilon-\overline{n-1}h)}{1.2.3 \ldots n}$$

$$\gamma > \frac{B_1}{A_1} > \varkappa$$
$$\gamma > \frac{B_2}{A_2} > \varkappa$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma > \frac{B_m}{A_m} > \varkappa$$

unter welchen auch zwei Gleichungen vorkommen. Multiplizirt man die erste Relation mit A_0, die zweite mit A_1, die dritte mit A_2 etc. und addirt darauf, so ist

$$\gamma(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots. + A_m)$$
$$> B_0 + B_1 + B_2 + \ldots. + B_m >$$
$$\varkappa(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots. + A_m)$$

daraus folgt durch Division mit $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m$

$$\gamma > \frac{B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_m}{A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m} > \varkappa$$

was mit dem obigen Satze auf Dasselbe hinauskommt.

Digitized by Google

$$\times\ M\left[\frac{\varDelta^n f(x)}{h^n}\ ,\ \frac{\varDelta^n f(x+h)}{h^n}\ ,\ \frac{\varDelta^n f(x+2h)}{h^n}\ ,\ \ldots\ \frac{\varDelta^n f(x+\varepsilon-nh)}{h^n}\right].$$

Lassen wir nun h bis zur Gränze Null abnehmen und berücksichtigen, dass überhaupt $Lim\ \frac{\varDelta^n f(u)}{h^n} = f^{(n)}(u)$ wird, so ergiebt sich, wenn wir zunächst die $x+h$, $x+2h$, ... $x+\varepsilon-nh$ noch beibehalten

$$Lim\ R_n = \frac{\varepsilon^n}{1.2.\ \ldots .\ n}$$

$$\times\ M[f^{(n)}(x)\ ,\ f^{(n)}(x+h)\ ,\ f^{(n)}(x+2h)\ ,\ \ldots\ f^{(n)}(x+\varepsilon-nh)].$$

Hier durchläuft die Variable u, welche wir dem $f^{(n)}$ leihen können, das Intervall x bis $x+\varepsilon-nh$ und zwar sprungweis, weil die auf einander folgenden Werthe von u, nämlich x, $x+h$, $x+2h$ etc., immer um h differiren, wenn aber h unbegränzt abnimmt, so durchläuft u das Intervall x bis $x+\varepsilon$ und zwar stetig, weil die Weiten der einzelnen Sprünge unter jede angebbare Grösse hinab vermindert sind. Die grösste und kleinste unter den Zahlen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(x+h)$, $f^{(n)}(x+2h)$, ... $f^{(n)}(x+\varepsilon-nh)$ sind jetzt nichts Anderes als das Maximum und Minimum, welches $f^{(n)}(u)$ erlangt, wenn u das Intervall x *bis* $x+\varepsilon$ durchläuft. Tritt das erste etwa für $u=\alpha$, das zweite für $u=\beta$ ein, so haben wir

$$Lim\ R_n = \frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ \ldots\ n}\ M[f^{(n)}(\alpha)\ ,\ f^{(n)}(\beta)].$$

Lässt man nun in der Differenz

$$M[f^{(n)}(\alpha)\ ,\ f^{(n)}(\beta)] - f^{(n)}(u)$$

u von x bis $x+\varepsilon$ gehen, so wird dieselbe einmal negativ, nämlich für $u=\alpha$, und einmal positiv, nämlich für $u=\beta$; unter der Voraussetzung, dass $f^{(n)}(u)$ stetig und endlich bleibt von $u=x$ bis $x+h$ folgt hieraus, dass es einen zwischen x und $x+h$ liegenden Werth von u etwa $u=\omega$ geben müsse, für welchen

$$M[f^{(n)}(\alpha)\ ,\ f^{(n)}(\beta)] - f(\omega) = 0$$

also

$$M[f^{(n)}(\alpha)\ ,\ f^{(n)}(\beta)] = f(\omega)$$

wird. Da aber $\omega > x$ und zugleich $< x+\varepsilon$ ist, so darf man $\omega = x+\lambda\varepsilon$ setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Die Zusammenfassung dieser Betrachtungen giebt nun den Satz:

Digitized by Google

Bleibt die Funktion $f^{(n)}(u)$ endlich und stetig während des Intervalles $u = x$ bis $u = x + \varepsilon$, so ist für $1 \geqq \lambda \geqq 0$,

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\lambda\varepsilon)$$

und hierin spricht sich das Theorem von *Taylor* aus. Setzt man $x = 0$ und schreibt nachher x für ε, so ergiebt sich daraus das Theorem von *Mac Laurin*, nämlich:

Bleibt die Funktion $f^{(n)}(u)$ endlich und stetig während des Intervalles $u = 0$ bis $u = x$, so ist für $1 \geqq \lambda \geqq 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1} + \frac{x^n f^{(n)}(\lambda x)}{1.2.3\ldots n}.$$

§. 7.

Die Interpolationsformel.

Die Gleichung, welche wir unter No. 2) in §. 5. kennen lernten, nämlich

$$1)\quad y_s = y + \frac{s}{1}\Delta y + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots.$$

lässt noch eine Betrachtung aus einem anderen Gesichtspunkte zu, die den wichtigsten Anwendungen der Differenzenrechnung zugezählt zu werden verdient. Schreiben wir nämlich

	a_0,	a_1,	a_2,	a_3,	....
für	x,	$x+h$,	$x+2h$,	$x+3h$,	....
ferner	A_0,	A_1,	A_2,	A_3,	....
für	y_0,	y_1,	y_2,	y_3,	....

so ist zunächst

$$A_s = A + \frac{s}{1}\Delta A + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 A + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 A + \ldots.$$

Digitized by Google

Behalten wir von der Reihe rechts n Glieder bei und setzen $x+sh$ d. h. $a+sh=z$ also $s=\frac{z-a}{h}$ und ferner

$$1)\quad \psi(z)=A+\frac{z-a}{1.h}\Delta A+\frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 A+\dots\dots$$
$$\dots\dots+\frac{(z-a)(z-a-h)(z-a-2h)\dots(z-a-\overline{n-2}h)}{1.2.3\dots(n-1).h^{n-1}}\Delta^{n-1}A,$$

so sind einige der bemerkenswerthesten Eigenschaften der hierdurch definirten Funktion $\psi(z)$ leicht zu entdecken. Es wird nämlich

für $z=a=a_0$, $\psi(z)=A=A_0$

„ $z=a+h=a_1$, $\psi(z)=A+\Delta A=A_1$

„ $z=a+2h=a_2$, $\psi(z)=A+2\Delta A+\Delta^2 A=A_2$

. . . .

„ $z=a+\overline{n-1}h=a_{n-1}$, $\psi(z)=A+\frac{n-1}{1}\Delta A+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta^2 A$
$+\dots\dots=A_{n-1}$

d. h. mit anderen Worten, die Funktion $\psi(z)$ besitzt die Eigenschaft, für $z=a_0$, a_1 , a_2 , ... a_{n-1} in A_0 , A_1 , A_2 , ... A_{n-1} überzugehen. Ferner ist leicht zu entscheiden, in welche Categorie die Funktion $\psi(z)$ fällt, denn denkt man sich alle auf der rechten Seite von 1) angedeuteten Multiplicationen ausgeführt und sämmtliche entstehende Partialprodukte nach Potenzen von z geordnet, so entsteht ein Resultat von der Form

$$2)\quad \psi(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\dots\dots+C_{n-1}z^{n-1}$$

worin C_0 , C_1 , C_2 etc. aus a , h , A , ΔA , $\Delta^2 A$ etc. zusammengesetzt sind. Die vorstehende Gleichung zeigt nun, dass $\psi(z)$ eine rationale, ganze algebraische Funktion von z und zwar eine des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Kehrt man diese Betrachtung um und setzt a_0 , a_1 , ... a_{n-1} so wie A_0 , A_1 , ... A_{n-1} als zusammengehörige gegebene Zahlen voraus, so enthält die Gleichung 1) die Auflösung des Problemes: „diejenige algebraische ganze und rationale Funktion von z — sie heisse $\psi(z)$ — zu bestimmen, welche für n gegebene um das Intervall h von einander entfernte Werthe von z, nämlich $z=a_0$, a_1 , a_2 , ... a_{n-1} , die ebenfalls gegebenen entsprechenden Werthe $\psi(a_0)=A_0$, $\psi(a_1)=A_1$,

Digitized by Google

$\psi(a_2) = A_2$, ... $\psi(a_{n-1}) = A_{n-1}$ annimmt.“ Denkt man sich die Sache geometrisch und betrachtet a_0 und A_0, a_1 und A_1, ... a_{n-1} und A_{n-1} als die zusammengehörenden Coordinaten von n Punkten, so ist $y = \psi(z)$, wo $\psi(z)$ durch No. 1) bestimmt wird, die Gleichung derjenigen parabolischen Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche durch die gegebenen n Punkte hindurchgeht. Verlangt man z. B. diejenige Parabel, welche durch drei Punkte geht, deren Abscissen 1, 3, 5 und deren Ordinaten 7, 11, 31 sind, so ist $a = 1$, $h = 2$,

$A_0 = 7$		
$A_1 = 11$	$\Delta A_0 = 4$	$\Delta^2 A_0 = 16$
$A_2 = 31$	$\Delta A_1 = 20$	

und nun wird nach No. 1)

$$\psi(z) = 7 + \frac{z-1}{1.2} \,.\, 4 + \frac{(z-1)(z-3)}{1.2.4} \,.\, 16$$

$$= 11 - 6z + 2z^2$$

mithin ist jetzt $y = 11 - 6z + 2z^2$ die Gleichung der gesuchten Parabel.

Diese Betrachtungen führen uns auf ganz natürlichem Wege zu dem Probleme der Interpolation. Sind nämlich n Werthe a_0, a_1, ... a_{n-1} einer unabhängigen Variabelen und n dazu gehörende Werthe A_0, A_1, ... A_{n-1} einer abhängigen Veränderlichen gegeben, so kann die Frage gestellt werden: „auf welche Weise lässt sich zu einem beliebigen anderen zwischen a_0 und a_{n-1} enthaltenen Werthe der unabhängigen Variabelen, etwa b, der zugehörige Werth B der abhängigen Veränderlichen finden?“ oder: „wie kann man zwischen irgend zweien der gegebenen Grössen A_0, A_1, ... A_{n-1} neue nach demselben Gesetze gebildete Grössen einschalten?“ Man übersieht aber leicht, dass diese Aufgabe in die Reihe der unbestimmten Aufgaben gehört, denn so wie es unzählige ihrer Natur nach ganz verschiedene Curven geben kann, welche sämmtlich durch n gegebene Punkte gehen, so sind auch hier unendlich verschiedene Funktionen $\varphi(z)$ möglich, die für $z = a_0$, a_1, ... a_{n-1} die Werthe $\varphi(a_0) = A_0$, $\varphi(a_1) = A_1$, ... $\varphi(a_{n-1}) = A_{n-1}$ annehmen, und jede dieser Funktionen liesse sich zu der verlangten Einschaltung benutzen; es wäre nämlich $B = \varphi(b)$. Bestimmt jedoch

Digitized by Google

wird die Aufgabe, wenn die Funktion $\varphi(z)$ eine algebraische rationale und ganze sein soll, denn in diesem Falle wird $\varphi(z) = \psi(z)$ und

$$2)\ B = A + \frac{b-a}{1.h}\Delta A + \frac{(b-a)(b-a-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 A + \frac{(b-a)(b-a-h)(b-a-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 A + \ldots$$

wobei rechts n Glieder zu nehmen sind. Diese Betrachtung ist selbst in dem Falle von Vortheil, wo man die Funktion $f(z)$ kennt, mittelst welcher $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ mit $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ verbunden sind; denn wenn das Intervall a_0 bis a_{n-1} nur wenig beträgt, und ausserdem die Funktion $f(z)$ nebst ihren Differenzialquotienten sich innerhalb desselben stetig ändert und endlich bleibt, so kann $f(z)$ nur wenig von $\psi(z)$ verschieden sein, weil das Theorem von *Mac Laurin* uns die Befugniss ertheilt, $f(z)$ näherungsweis für eine parabolische Funktion anzusehen. Man kann also näherungsweis statt $B = f(b)$ die Gleichung $B = \psi(b)$ substituiren, d. h. die Formel 2) zur Interpolation benutzen. Einige Beispiele werden diess deutlich machen.

Es sei

$a_0 = 37$, $A_0 = 0{,}6018150$
$a_1 = 38$, $A_1 = 0{,}6156615$
$a_2 = 39$, $A_2 = 0{,}6293204$
$a_3 = 40$, $A_3 = 0{,}6427876$
$a_4 = 41$, $A_4 = 0{,}6560590$

und die Forderung gestellt, den Werth B zu finden, welcher $b = 37\frac{3}{4}$ entspricht, so hat man

$\Delta A_0 = 0{,}0138465$	$\Delta^2 A_0 = -0{,}0001876$	$\Delta^3 A_0 = 0{,}0000041$
$\Delta A_1 = 0{,}0136589$	$\Delta^2 A_1 = -0{,}0001917$	$\Delta^3 A_1 = 0{,}0000041$
$\Delta A_2 = 0{,}0134672$	$\Delta^2 A_2 = -0{,}0001958$	
$\Delta A_3 = 0{,}0132714$		

und die folgenden Differenzen werden $= 0$. Da nun $h = 1$, so findet man leicht

$$A = 0{,}6018150$$
$$\frac{b-a}{1.h}\,\Delta A = 0{,}0103849$$
$$\frac{(b-a)(b-a-h)}{1.2.h^2}\,\Delta^2 A = 0{,}0000176$$
$$\frac{(b-a)(b-a-h)(b-a-2h)}{1.2.3.h^3}\,\Delta^3 A = -\,0{,}0000002$$
$$B = 0{,}6122153.$$

Eine Controle kann hier leicht angestellt werden; es ist nämlich $f(z)$ = dem Sinus von z Graden, mithin B gleich dem Sinus $37\frac{3}{4}$ Grad = $\sin 37^\circ\ 45'$, und in der That stimmt der gefundene Werth von B damit überein.

Um zugleich die übersichtliche Form zu zeigen, in welcher man diese Rechnung gewöhnlich auszuführen pflegt, geben wir ein zweites Beispiel in etwas grösserm Maassstabe, wobei $\log \pi$ auf 9 Dezimalen berechnet werden soll.

num.	log.	diff. I.	II.	III.	IV.
3,14	0,49692 96481				
3,15	0,49831 05538	138 09057			
3,16	0,49968 70826	137 65288	— 43769		
3,17	0,50105 92622	137 21796	— 43492	277	
3,18	0,50242 71200	136 78578	— 43218	274	— 3

hiernach ist

$$A = 0{,}49692\ 96481$$
$$\Delta A = 0{,}00138\ 09057$$
$$\Delta^2 A = -\,0{,}00000\ 43769$$
$$\Delta^3 A = 0{,}00000\ 00277$$
$$\Delta^4 A = -\,0{,}00000\ 00003$$

$b = 3{,}14159\ 26536$, $h = 0{,}01$, $b-a = 0{,}00159\ 26536$

und wenn man hiernach die fünf ersten Glieder der Reihe 2) berechnet, so ergiebt sich B d. h.

$$\log (3{,}14159\ 26536) = 0{,}4971498726$$

was auf 9 Dezimalstellen richtig ist.

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+ \Delta_y u + \Delta_x\Delta_z u + \Delta_x\Delta_y\Delta_s u\\
&+ \Delta_z u + \Delta_x\Delta_s u + \Delta_x\Delta_z\Delta_s u\\
&+ \Delta_s u + \Delta_y\Delta_z u + \Delta_y\Delta_z\Delta_s u\\
&\qquad\quad + \Delta_y\Delta_s u\\
&\qquad\quad + \Delta_z\Delta_s u
\end{aligned}
$$

indem man auf ähnliche Art wie vorhin sich überzeugt, dass die Ordnung der partiellen Differenzirungen keinen Einfluss auf das Endresultat ausübt. Das Gesetz nun, unter welchem die verschiedenen bisher entwickelten Ausdrücke stehen, ist leicht zu erkennen. In der ersten Colonne rechts steht nämlich u allein, in der zweiten stehen $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, $\Delta_z u$, ... soviel dieser partiellen Differenzen vorhanden sind, die dritte Vertikalreihe enthält alle Combinationen zu je zwei Elementen, die aus $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, ... ohne Wiederholungen gebildet werden können, die vierte Colonne giebt die möglichen Combinationen zu je drei aus denselben Elementen ohne Wiederholungen u. s. w. Mit einem Worte, das Bildungsgesetz ist dasselbe, als wenn man die Multiplikation

$$(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z)(1 + \Delta_s) \ldots.$$

ausgeführt und darauf an jedes entstehende Partialprodukt u angesetzt hätte. Man kann daher die symbolische Formel

$$
\begin{aligned}
&f(x + \Delta x\,,\, y + \Delta y\,,\, \ldots.\, t + \Delta t)\\
&= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \ldots. (1 + \Delta_t)]u
\end{aligned}
$$

aufstellen. Subtrahirt man nun beiderseits $f(x\,,\, y\,,\, \ldots\, t) = u$, so ergiebt sich die totale Differenz

$$2)\quad \Delta u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \ldots. (1 + \Delta_t) - 1]u$$

oder

$$
\begin{aligned}
3)\quad &f(x + \Delta x\,,\, y + \Delta y\,,\, \ldots.\, t + \Delta t) - f(x\,,\, y\,,\, \ldots.\, t)\\
&= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \ldots. (1 + \Delta_t) - 1]\, f(x\,,\, y\,,\, \ldots.\, t).
\end{aligned}
$$

Nicht minder leicht ist es, für die totalen Differenzen höherer Ordnungen eine ähnliche symbolische Formel aufzustellen. Bei zwei Variabelen hat man zunächst

$$\Delta^2 u = \Delta[\Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x\Delta_y u]$$

also wenn man auf jedes einzelne Glied die Formel für Δu selbst anwendet

$$\Delta^2 u = \Delta_x\Delta_x u + \Delta_y\Delta_x u + \Delta_x\Delta_y\Delta_x u$$

Digitized by Google

$$+ \Delta_x\Delta_y u + \Delta_y\Delta_y u + \Delta_x\Delta_y\Delta_y u$$
$$+ \Delta_x\Delta_x\Delta_y u + \Delta_y\Delta_x\Delta_y u + \Delta_x\Delta_y\Delta_x\Delta_y u$$

oder nach gehöriger Vereinigung

$$\Delta^2 u = \Delta_x^2 u + 2\Delta_x\Delta_y u + \Delta_y^2 u$$
$$+ 2\Delta_x^2\Delta_y u + 2\Delta_x\Delta_y^2 u + \Delta_x^2\Delta_y^2 u.$$

Man kann aber viel rascher hierzu durch die Bemerkungen gelangen, dass bei einer neuen Differenzenbildung ein neues Δ auf ähnliche Weise wie ein neuer Faktor an jedes einzelne der vorhergehenden Differenz herantritt. So ist

$$\Delta^2 u = \Delta_x\Delta u + \Delta_y\Delta u + \Delta_x\Delta_y\Delta u$$

oder wenn man sich die Fiktion erlaubt, dass Δu ein gemeinschaftlicher Faktor sei,

$$\Delta^2 u = (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_x\Delta_y)\Delta u.$$

Es ist aber Δu bekannt und zwar $= (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_x\Delta_y)u$, wenn man auch hier die symbolische Darstellung benutzt und mithin wird jetzt ebenfalls symbolisch:

$$\Delta^2 u = (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_x\Delta_y)^2 u.$$

Diese Betrachtungsweise ist leicht auf die Formel 2) anzuwenden; man hat nämlich

$$\Delta^2 u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]\Delta u$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]^2 u$$

ferner ganz ebenso

$$\Delta^3 u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]^2\Delta u$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]^2 u$$

u. s. w.

Ueberhaupt gilt für die n^{te} totale Differenz die elegante symbolische Formel

4) $$\Delta^n u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]^n u$$

oder in der Bezeichnung durch Funktionen

5) $$\Delta^n f(x, y, \;....\; t)$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \;....\; (1 + \Delta_t) - 1]^n f(x, y \;....\; t)$$

Digitized by Google

§. 9.

Zusammenhang zwischen den Differenzen und höheren Differenzialquotienten einer Funktion.

Schreibt man den *Taylor*'schen Satz in der Form

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n\text{-}1)}f^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\lambda h)$$

so erkennt man leicht, dass derselbe dazu dienen kann, die Differenz $\Delta f(x)$ in eine nach Potenzen von h fortgehende Reihe zu entwickeln, vorausgesetzt dass $f^{(n)}(u)$ und mithin *) auch $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$, ... $f^{(n)}(u)$ innerhalb des Intervalles $u=x$ bis $u=x+h$ endlich und continuirlich bleiben. Sind nun sämmtliche Differenzialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ bis in's Unendliche hinab innerhalb des gedachten Intervalles endliche und stetige Funktionen von x und hat man ausserdem noch für unendlich wachsende n

$$Lim\left[\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\lambda h)\right]=0$$

---

*) Aus der Endlichkeit und Stetigkeit von $\varphi'(x)$ folgt nämlich die von $\varphi(x)$ und zwar mittelst nachstehender Schlüsse. Es ist

$$\varphi'(x)=Lim\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta},\ \text{für } \delta=0.$$

Wäre nun $\varphi(x)$ an einer zwischen x und $x+h$ liegenden Stelle a diskontinuirlich, so würde $\varphi(a)$ zwei verschiedene Werthe besitzen, von denen der eine den Endwerth der bisherigen Reihe von Werthen und der andere den Anfangswerth einer neuen Reihe bildete. Halten wir diese Werthe durch die Bezeichnung $\varphi(a-0)$ und $\varphi(a+0)$ aus einander, so ist $\varphi(a+0)-\varphi(a-0)$ nicht $=0$, sondern gleich einer endlichen Grösse, mithin wird für $x=a$

$$Lim\frac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a-0)}{\delta}=\frac{\varphi(a+0)-\varphi(a-0)}{\delta}=\infty$$

also wäre gegen die Voraussetzung $\varphi'(a)=\infty$. Aus der Stetigkeit und Endlichkeit von $f^{(n)}(u)$ folgt nun die von $f^{(n-1)}(u)$, aus dieser die von $f^{(n-2)}(u)$ u. s. f., wodurch sich das obige „mithin" rechtfertigt.

Digitized by Google

so verwandelt sich die Gleichung

$$\Delta f(x) - \frac{h^n}{1.2\,..\,n} f^{(n)}(x+\lambda h) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n\text{-}1)} f^{(n-1)}(x)$$

bei unendlich wachsenden n in die nachstehende

$$\Delta f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots \textit{ in inf.}$$

Bezeichnen wir wie früher $f(x)$ mit y und die m^{te} derivirte Funktion $f^{(m)}(x)$ mit $D^m f(x)$, so ist auch

$$1)\quad \Delta y = \frac{h}{1} Dy + \frac{h^2}{1.2} D^2 y + \frac{h^3}{1.2.3} D^3 y + \ldots$$

Diese Gleichung lässt eine kurze symbolische Darstellung zu, sobald man sich y einem gemeinschaftlichen Faktor ähnlich abgesondert denkt und darauf die bekannte Formel

$$e^z - 1 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

worin $e = 2{,}7182818284590\,..$, für $z = hD$ in Anwendung bringt. Man hat dann

$$2)\qquad \Delta y = (e^{hD} - 1)y$$

wobei man nur die Fiktionen, welche in dieser Form liegen, nicht aus den Augen verlieren darf. Nach Formel 1) hat man nun weiter

$$\Delta^2 y = \frac{h}{1} \Delta Dy + \frac{h^2}{1.2} \Delta D^2 y + \frac{h^3}{1.2.3} \Delta D^3 y + \ldots$$

oder weil man die Reihenfolge der durch Δ und D angedeuteten Operationen vertauschen kann *)

---

*) Es ist nämlich $D[\Delta\varphi(x)] = D[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$ d. i. $D[\Delta\varphi(x)] = \varphi'(x+h) - \varphi'(x)$. Das letztere erhält man aber auch wenn von $\varphi'(x) = D\varphi(x)$ die Differenz genommen wird, und folglich ist $D[\Delta\varphi(x)] = \Delta\varphi'(x)] = \Delta[D\varphi(x)]$ oder umgekehrt geschrieben

$$\Delta D\varphi(x) = D\Delta\varphi(x).$$

Diess giebt für $\varphi(x) = y$ zunächst $\Delta Dy = D\Delta y$, ferner für $\varphi(x) = Dy$, $\Delta DDy = D\Delta Dy = DD\Delta y$ oder $\Delta D^2 y = D^2\Delta y$, für $\varphi(x) = D^2 y$, $\Delta DD^2 y = D\Delta D^2 y = DD^2\Delta y$ d. h. $\Delta D^3 y = D^3\Delta y$ u. s. f. Diese Beziehungen sind es, welche die Worte des Textes andeuten.

Digitized by Google

$$\Delta^2 y = \frac{h}{1} D\Delta y + \frac{h^2}{1.2} D^2\Delta y + \frac{h^3}{1.2.3} D^3\Delta y + \dots$$

oder in kurzer symbolischer Darstellung

$$\Delta^2 y = (e^{hD} - 1)\Delta y$$

d. i. vermöge des Werthes von Δy nach No. 2)

$$\Delta^2 y = (e^{hD} - 1)^2 y.$$

Wendet man diese Betrachtung noch einmal an, so erhält man weiter

$$\Delta^3 y = (e^{hD} - 1)^2 \Delta y = (e^{hD} - 1)^3 y;$$

den ferneren Gang dieser Schlüsse wird man leicht übersehen und man erhält dadurch allgemein

$$3)\qquad \Delta^n y = (e^{hD} - 1)^n y.$$

Eine ganz ähnliche symbolische Formel ergiebt sich hieraus für die n^{te} totale Differenz einer Funktion u von mehreren unabhängigen Variabelen $x, y, z, \dots$, sobald man in der Gleichung

$$\Delta^n u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) \dots - 1]^n u$$

die einzelnen Faktoren durch die Gleichung 2) ausdrückt. Nennen wir nämlich i das Inkrement von y, k das von z u. s. f., so dass also $i, k, \dots$ für $y, z, \dots$ das sind, was h für x, so ist

$$\Delta_x u = (e^{hD_x} - 1)u$$
$$\Delta_y u = (e^{iD_y} - 1)u$$
$$\Delta_z u = (e^{kD_z} - 1)u$$

u. s. w.

worin die Differenzialquotienten $D_x, D_y, D_z, \dots$, wie sich von selbst versteht, partielle sind. Man hat nun weiter

$$u + \Delta_x u = (e^{hD_x} - 1)u = e^{hD_x} u$$

folglich, weil bei der symbolischen Darstellung u als Faktor angesehen wird, nach Division mit u

$$1 + \Delta_x = e^{hD_x}$$

und auf ganz gleiche Weise

$$1 + \Delta_y = e^{iD_y}\ ,\ 1 + \Delta_z = e^{kD_z}\ ,\ \text{etc.}$$

Mit Hülfe dieser Substitutionen verwandelt sich die Formel für $\Delta_n u$ in die folgende symbolische

$$4)\qquad \Delta^n u = (e^{hD_x + iD_y + kD_z + \dots} - 1)^n u.$$

Dem Probleme, welches durch die Gleichungen 3) und 4) gelöst wird,

Digitized by Google

nämlich: „irgend eine Differenz einer Funktion durch die Differenzialquotienten derselben Funktion auszudrücken," lässt sich leicht das umgekehrte gegenüberstellen: „irgend einen Differenzialquotienten einer Funktion durch die Differenzen derselben Funktion auszudrücken" und die Lösung desselben ergiebt sich auf folgendem Wege. Man multiplizire zunächst die Gleichung 3) mit $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, so dass

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n}(e^{hD}-1)^n y = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y$$

wird und addire jetzt Alles, was sich hieraus für $n = 1, 2, 3, 4$, etc. *in inf.* ergiebt. Unter der Bemerkung, dass links y als constanter Faktor angesehen werden darf, ergiebt sich jetzt

$$[\tfrac{1}{1}(e^{hD}-1) - \tfrac{1}{2}(e^{hD}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(e^{hD}-1)^3 - \ldots]y$$
$$= \tfrac{1}{1}\Delta y - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y - \tfrac{1}{4}\Delta^4 y + \ldots$$

Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\tfrac{1}{1}z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots = l(1+z)$$

verwandelt sich nun die linke Seite in $l(e^{hD})y = hDy$ und mithin ist

$$5)\quad hDy = \tfrac{1}{1}\Delta y - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y - \ldots$$

Denkt man sich, um wieder zu einer symbolischen Formel zu gelangen, y als gemeinschaftlichen Faktor abgesondert, und die vorige logarithmische Formel angewendet, so ist

$$6)\quad hDy = [l(1+\Delta)]y.$$

Die Formel lässt sich sogleich erweitern, wenn man beiderseits differenzirt; man findet nämlich

$$hD^2y = [l(1+\Delta)]Dy$$

d. i. nach beiderseitiger Multiplikation mit h und Anwendung der Formel 6)

$$h^2D^2y = [l(1+\Delta)]^2y.$$

Nochmalige Differenziation und Multiplikation mit h würde zu einer ähnlichen Formel für h^3D^3y führen; man erkennt hieraus leicht das allgemeine Gesetz für den weiteren Fortgang, nämlich

$$7)\quad h^nD^ny = [l(1+\Delta)]^ny.$$

Wählt man die Funktionen, die hier betrachtet worden sind, so, dass man ihre Differenzen und Differenzialquotienten unmittelbar angeben

Digitized by Google

kann, so führen die Relationen dieses Paragraphen zu speziellen Sätzen, die aber nur so lange gelten, als die in ihnen vorkommenden unendlichen Reihen convergent bleiben. Die letztere Bemerkung hat ihren Grund darin, dass nur convergente Reihen bestimmten endlichen Grössen gleich gesetzt werden dürfen und folglich die ganzen am Faden der Gleichungen fortlaufenden Betrachtungen dieses Paragraphen in letzter Instanz jene Befugniss und mit ihr die Convergenz stillschweigend voraussetzen.

Es giebt übrigens noch eine anderweite Beziehung zwischen den Differenzialquotienten und den Differenzen einer Funktion; da dieselbe an Wichtigkeit und besonders an praktischer Brauchbarkeit die bisherigen Relationen noch übertrifft, so werden wir nach Voraussendung einiger Hülfssätze ausführlicher von ihr handeln.

§. 10.

Zwei Rekursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen.

I. Bezeichnen wir die Bernoulli'schen Zahlen der Reihe nach mit B_1, B_3, B_5 etc., so ist bekanntlich für $u < \pi$

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u$$

$$= \frac{B_1}{1.2} u + \frac{B_3}{1.2.3.4} u^3 + \frac{B_5}{1.2 \ldots 6} u^5 + \ldots$$

oder wenn die kurze Ausdrucksweise $1.2 = 2'$, $1.2.3 = 3'$, $1.2.3.4 = 4'$ etc. angewendet wird

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u = \frac{B_1}{2'} u + \frac{B_3}{4'} u^3 + \frac{B_5}{6'} u^5 + \ldots$$

Diese Gleichung werde mit $\cos u$ multiplizirt und dabei auf der rechten Seite für $\cos u$ die gleichgeltende Reihe gesetzt; auf der linken Seite berücksichtige man, dass

$$\cot \tfrac{1}{2} u \cos u = \cot \tfrac{1}{2} u \, (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} u)$$
$$= \cot \tfrac{1}{2} u - \sin u$$

ist, man erhält dann

$$\frac{\cos u}{u} - \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin u$$

Digitized by Google

$$= \left(\frac{B_1}{2'}u + \frac{B_3}{4'}u^3 + \ldots.\right)\left(1 - \frac{u^2}{2'} + \frac{u^4}{4'} - \ldots.\right)$$

führt man die auf der rechten Seite angedeutete Multiplication aus und substituirt für die links stehenden goniometrischen Funktionen die bekannten Reihen, so erhält man ohne Mühe

$$\begin{array}{rr|r|r|r|r}
\frac{1}{u} - & \frac{1}{2'}u & + \frac{1}{4'}u^3 & - \frac{1}{6'}u^5 & + \frac{1}{8'}u^7 & - \ldots. \\
-\frac{1}{u} + & \frac{B_1}{2'} & + \frac{B_3}{4'} & + \frac{B^5}{6'} & + \frac{B^7}{8'} & + \ldots. \\
+ & \frac{1}{2}\frac{1}{1'} & - \frac{1}{2}\frac{1}{3'} & + \frac{1}{2}\frac{1}{5'} & - \frac{1}{2}\frac{1}{7'} & + \ldots.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
= \frac{B_1}{2'}u + & \frac{B_3}{4'}u^3 + & \frac{B_5}{6'}u^5 + & \frac{B_7}{8'}u^7 + \ldots. \\
- \frac{1}{2'}\frac{B_1}{2'} & - \frac{1}{2'}\frac{B_3}{4'} & - \frac{1}{2'}\frac{B_5}{6'} & - \ldots. \\
 & + \frac{1}{4'}\frac{B_1}{2'} & + \frac{1}{4'}\frac{B_3}{4'} & + \ldots. \\
 & & - \frac{1}{6'}\frac{B_1}{2'} & - \ldots.
\end{array}$$

und wenn man beiderseits die Coeffizienten von u, u^3, u^5 etc. vergleicht, so ist

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1'} + \frac{B_1}{2'} - \frac{1}{2'} = \frac{B_1}{2'}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3'} - \frac{B_3}{4'} - \frac{1}{4'} = \frac{1}{2'}\frac{B_1}{2'} - \frac{B_3}{4'}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{5'} + \frac{B_5}{6'} - \frac{1}{6'} = \frac{1}{4'}\frac{B_1}{2'} - \frac{1}{2'}\frac{B_3}{4'} + \frac{B_5}{6'}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{7'} - \frac{B_7}{8'} - \frac{1}{8'} = \frac{1}{6'}\frac{B_1}{2'} - \frac{1}{4'}\frac{B_3}{4'} + \frac{1}{2'}\frac{B_5}{6'} - \frac{B_7}{8'}$$

u. s. f.

Achtet man auf diejenigen Glieder, welche sich beiderseits heben, so erkennt man leicht die Richtigkeit folgender allgemeinen Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(2m-1)'} - \frac{1}{(2m)'} = \frac{1}{(2m-2)'}\frac{B_1}{2'} - \frac{1}{(2m-4)'}\frac{B_3}{4'} + \ldots.$$

$$\ldots. \pm \frac{1}{2'}\frac{B_{2m-3}}{(2m-2)'}$$

Digitized by Google

Durch Multiplikation mit $(2m-1)'$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$$

$$= \frac{2m-1}{1.2} B_1 - \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4} B_3$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)}{1.2.3.4.5.6} B_5 - \ldots.$$

d. i. der Bezeichnung von Binominalkoeffizienten zufolge und nach Hebung mit $\frac{1}{2}$,

$$1)\quad \frac{m-1}{m} = \frac{1}{1}(2m-1)_1 B_1 - \frac{1}{2}(2m-1)_3 B_3 + \frac{1}{3}(2m-1)_5 B_5 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \frac{1}{m-1}(2m-1)_{2m-3} B_{2m-3}.$$

II. Auf ganz ähnliche Weise gelangen wir zu der zweiten nachher zu benutzenden Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen; wir gehen nämlich von der Gleichung

$$\frac{\cos u}{u} - \frac{1}{\sin u} + \sin u = \left(\frac{1}{u} - \cot u\right) \cos u$$

aus, setzen darin für $\cos u$, $\sin u$ die bekannten Reihen,

$$\frac{1}{\sin u} = \frac{1}{u} + \frac{2(2-1)}{2'} B_1 u + \frac{2(2^3-1)}{4'} B_3 u^3 + \ldots.$$

$$\frac{1}{u} - \cot u = \frac{2^2 B_1}{2'} u + \frac{2^4 B_5}{4'} u^3 + \ldots.$$

und führen die rechter Hand angedeutete Multiplication aus. Es wird dann

$$\begin{array}{cc|c|c|c}
\frac{1}{u} - & \frac{1}{2'} u + & \frac{1}{4'} u^3 - & \frac{1}{6'} u^5 & + \ldots. \\
-\frac{1}{u} - & \frac{2(2-1)}{2'} B_1 & -\frac{2(2^3-1)}{4'} B_3 & -\frac{2(2^5-1)}{6'} B_5 & + \ldots. \\
+ & \frac{1}{1'} & -\frac{1}{3'} & +\frac{1}{5'} & - \ldots.
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
= \frac{2^2 B_1}{2'} u + & \frac{2^4 B_3}{4'} u^3 + & \frac{2^6 B_5}{6'} u^5 + \ldots. \\
 & -\frac{1}{2'} \frac{2^2 B_1}{2'} & -\frac{1}{2'} \frac{2^4 B_3}{4'} \quad - \ldots. \\
 & & +\frac{1}{4'} \frac{2^2 B_1}{2'} \quad + \ldots.
\end{array}$$

Digitized by Google

hieraus folgt durch Vergleichung der Coeffizienten von u^{2m-1}

$$\frac{1}{(2m-1)'} + (-1)^m \frac{2(2^{2m-1}-1)}{(2m)'} B_{2m-1} - \frac{1}{(2m)'}$$

$$= \frac{1}{(2m-2)'} \frac{2^2 B_1}{2'} - \frac{1}{(2m-4)'} \frac{2^4 B_3}{4'} + \frac{1}{(2m-6)'} \frac{2^6 B_5}{6'} - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m-1}}{(2m)'}$$

hieraus findet sich nach Division mit 2^{2m} leicht

$$2)\quad \frac{(-1)^m}{(2m)'} \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_{2m-1} = \frac{1}{(2m)' 2^{2m}} - \frac{1}{2(2m-1)' 2^{2m-1}}$$

$$+ \frac{B_1}{2'(2m-2)'} \frac{1}{2^{2m-2}} - \frac{B_3}{4'(2m-4)'} \frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-2)' 2'} \frac{1}{2^2}.$$

§. 11.

Summirung einer Reihe von Differenzen.

Wir nehmen noch einmal unseren Auslauf von dem Theoreme *Taylors*, worin wir jedoch das letzte Glied (Ergänzungsglied) der Reihe in Form eines bestimmten Integrales darstellen. Unter der Bedingung nämlich, dass $F^{(n+1)}(u)$ endlich und stetig bleibt innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$, ist

$$1)\quad \Delta F(x) = \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} F^{(n)}(x)$$

$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n+1)}(x+t)\,dt.$$

Setzen wir gleichzeitig

$$F(x) = f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(\ m-1)}(x)$$

und $\quad n = 2m,\ 2m-1,\ 2m-2,\ \ldots \quad 1$

so ergiebt sich aus der Formel 1) die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\Delta f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) \ldots + \frac{h^{2m}}{1.2\ldots(2m)} f^{(2m)}(y)$$

$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2m}}{1.2\ldots(2m)} f^{(2m+1)}(x+t)\,dt$$

Digitized by Google

$$\Delta f'(x) = \frac{h}{1} f''(x) + \frac{h^2}{1.2} f'''(x) + \dots + \frac{h^{2m-1}}{1.2..(2m-1)} f^{(2m)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2m-1}}{1.2 \dots (2m-1)} f^{(2m+1)}(x+t)\,dt$$

$$\Delta f''(x) = \frac{h}{1} f'''(x) + \frac{h^2}{1.2} f''''(x) + \dots + \frac{h^{2m-2}}{1.2 \dots (2m-2)} f^{(2m)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2m-2}}{1.2 \dots (2m-2)} f^{(2m+1)}(x+t)\,dt$$

. . . .

$$\Delta f^{(2m-1)}(x) = \frac{h}{1} f^{(2m)}(x) + \int_0^h \frac{h-t}{1} f^{(2m+1)}(x+t)\,dt.$$

Diese Gleichungen addiren wir, nachdem die zweite mit $A_1 h$, die dritte mit $A_2 h^2$, die vierte mit $A_3 h^3$, ... die letzte mit $A_{2m-1} h^{2m-1}$ multiplizirt worden ist, wobei A_1, A_2, ... A_{2m-1} gewisse numerische, vor der Hand aber noch unbestimmte Coeffizienten bezeichnen. Es ergiebt sich jetzt durch Vereinigung der gleichartigen Grössen:

$$\Delta f(x) + A_1 h \Delta f'(x) + A_2 h^2 \Delta f''(x) + \dots + A_{2m-1} h^{2m-1} \Delta f^{(2m-1)}(x)$$
$$= \frac{h}{1} f'(x)$$
$$+ \left[\frac{1}{1.2} + \frac{A_1}{1}\right] h^2 f''(x)$$
$$+ \left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_2}{1}\right] h^3 f'''(x)$$

. . . .

$$+ \left[\frac{1}{1.2..(2m)} + \frac{A_1}{1.2..(2m-1)} + \dots + \frac{A_{2m-2}}{1.2} + \frac{A_{2m-1}}{1}\right] h^{2m} f^{(2m)}(x)$$
$$+ \int_0^h \left[\frac{(h-t)^{2m}}{1.2..(2m)} + \frac{A_1 h (h-t)^{2m-1}}{1.2..(2m-1)} + \frac{A_2 h^2 (h-t)^{2m-2}}{1.2..(2m-2)} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{A_{2m-1} h^{2m-1}(h-t)}{1}\right] f^{(2m+1)}(x+t)\,dt.$$

Die noch unbestimmten $2m-1$ Coeffizienten A_1, A_2, ... A_{2m-1} wollen wir nun so wählen, dass sie den $2m-1$ Gleichungen

Digitized by Google

$$2)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1.2}+\frac{A_1}{1}=0\\&\frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+\frac{A_2}{1}=0\\&\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{A_1}{1.2.3}+\frac{A_2}{1.2}+\frac{A_3}{1}=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{1}{1.2..(2m)}+\frac{A_1}{1.2..(2m\text{-}1)}+\ldots.+\frac{A_{2m-2}}{1.2}+\frac{A_{2m-1}}{1}=0\end{aligned}\right.$$

Genüge leisten, was offenbar immer möglich ist, weil diese Gleichungen sämmtlich vom ersten Grade sind. Die obige Summirung nimmt jetzt, wenn noch zur Abkürzung

$$3)\ F(x,h)=\int_0^h\left[\frac{(h\text{-}t)^{2m}}{(2m)'}+\frac{A_1h(h\text{-}t)^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{A_{2m-1}h^{2m-1}(h\text{-}t)}{1'}\right]f^{(2m+1)}(x+t)dt$$

gesetzt wird, bei umgekehrter Anordnung die folgende einfache Gestalt an:

$$4)\qquad hf'(x)+F(x,h)$$
$$=\Delta f(x)+A_1h\Delta f'(x)+A_2h^2\Delta f''(x)+\ldots+A_{2m-1}h^{2m-1}\Delta f^{(2m-1)}(x).$$

Hier sind nun noch zwei Aufgaben zu lösen; zunächst muss man nämlich $F(x,h)$ auf die einfachste Form zu bringen suchen, damit man im Stande ist den Werth dieses Ergänzungsgliedes, oder wenigstens Gränzen anzugeben, zwischen denen derselbe enthalten ist, ausserdem macht sich noch die wirkliche Bestimmmung der Coeffizienten A_1, A_2, .. A_{2m-1}, d. h. die Auflösung der Gleichungen 2) nöthig.

Zerlegen wir das unter dem Integralzeichen in No. 3) eingeklammerte Polynom wie folgt:

$$5)\ \varphi(h\text{-}t)=\frac{(h\text{-}t)^{2m}}{(2m)'}+\frac{A_1h(h\text{-}t)^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'}$$
$$+\frac{A_2h^2(h\text{-}t)^{2m-2}}{(2m\text{-}2)'}+\frac{A_4h^4(h\text{-}t)^{2m-4}}{(2m\text{-}4)'}+\ldots.+\frac{A_{2m-2}h^{2m-2}(h\text{-}t)^2}{2'}$$

$$6)\ \psi(h\text{-}t)=\frac{A_3h^3(h\text{-}t)^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'}+\frac{A_5h^5(h\text{-}t)^{2m-5}}{(2m\text{-}5)'}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{A_{2m-1}h^{2m-1}(h\text{-}t)}{1'}$$

Digitized by Google

so kann man $F(x,h)$ wie folgt ausdrücken

$$7)\quad F(x,h) = \int_0^h [\varphi(h-t) + \psi(h-t)]\, f^{(2m+1)}(x+t)dt.$$

Entwickelt man die Binome $h-t$, $(h-t)^2$, ... $(h-t)^{2m-1}$ auf gewöhnliche Weise und fasst alle mit gleichen Potenzen von h versehenen Glieder zusammen, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}
&\varphi(h-t) + \psi(h-t) \\
&= h^{2m}\left[\frac{1}{(2m)'} + \frac{A_1}{(2m-1)'} + \frac{A_2}{(2m-2)'} + \dots + \frac{A_{2m-1}}{1'}\right] \\
&- \frac{h^{2m-1}t}{1'}\left[\frac{1}{(2m-1)'} + \frac{A_1}{(2m-2)'} + \dots + \frac{A_{2m-2}}{1'} + A_{2m-1}\right] \\
&+ \frac{h^{2m-2}t^2}{2'}\left[\frac{1}{(2m-2)'} + \frac{A_1}{(2m-3)'} + \dots + \frac{A_{2m-3}}{1'} + A_{2m-2}\right] \\
&- \frac{h^{2m-3}t^3}{3'}\left[\frac{1}{(2m-3)'} + \frac{A_1}{(2m-4)'} + \dots + \frac{A_{2m-4}}{1'} + A_{2m-3}\right] \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&- \frac{h^3t^{2m-3}}{(2m-3)'}\left[\frac{1}{3'} + \frac{A_1}{2'} + \frac{A_2}{1'} + A_3\right] \\
&+ \frac{h^2t^{2m-2}}{(2m-2)'}\left[\frac{1}{2'} + \frac{A_1}{1'} + A_2\right] \\
&- \frac{ht^{2m-1}}{(2m-1)'}\left[\frac{1}{1'} + A_1\right] \\
&+ \frac{t^{2m}}{(2m)'}
\end{aligned}$$

d. i. wenn man die Gleichungen 2) berücksichtigt

$$\begin{aligned}
&\varphi(h-t) + \psi(h-t) \\
&= \frac{t^{2m}}{(2m)'} + \frac{A_1ht^{2m-1}}{(2m-1)'} \\
&+ \frac{A_2h^2t^{2m-2}}{(2m-2)'} + \frac{A_4h^4t^{2m-4}}{(2m-4)'} + \dots + \frac{A_{2m-2}h^{2m-2}t^2}{2'} \\
&- \left[\frac{A_3h^3t^{2m-3}}{(2m-3)'} + \frac{A_5h^5t^{2m-}}{(2m-5)'} + \dots + \frac{A_{2m-1}h^{2m-1}t}{1'}\right].
\end{aligned}$$

Vergleicht man aber die hier vorkommenden Reihen mit denen in No. 5) und 6), so erhält man die einfache Relation

$$8)\quad \varphi(h-t) + \psi(h-t) = \varphi(t) - \psi(t)$$

Digitized by Google

hieraus folgt für $t = \frac{1}{2}h$, $\psi(\frac{1}{2}h) = -\psi(\frac{1}{2}h)$ d. i. $\psi(\frac{1}{2}h) = 0$; vermöge der Bedeutung von $\psi(t)$ muss also hiernach für jedes ganze positive m

$$\frac{A_3 (\frac{1}{2})^{2m-3}}{(2m-3)'} + \frac{A_5 (\frac{1}{2})^{2m-5})}{(2m-5)'} + \ldots + \frac{A_{2m-1} (\frac{1}{2})}{1'} = 0$$

sein und daraus erhält man der Reihe nach für $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$A_3 = 0, \; A_5 = 0, \; A_7 = 0, \; \ldots \; A_{2m-1} = 0.$$

Berücksichtigt man ausserdem, dass aus der ersten Gleichung in 2) $A_1 = -\frac{1}{2}$ folgt, so sind jetzt alle Coeffizienten von ungeradem Index bestimmt. Die Coeffizienten gerader Ordnung bestimmen sich nun aus der letzten Gleichung in 2), wenn man die für $A_1, A_3, \ldots A_{2m-1}$ gefundenen Werthe substituirt. Es wird nämlich

$$\frac{1}{(2m)'} - \frac{\frac{1}{2}}{(2m-1)'}$$

$$+ \frac{A_2}{(2m-2)'} + \frac{A_4}{(2m-4)'} + \frac{A_6}{(2m-6)'} + \ldots + \frac{A_{2m-2}}{2'} = 0$$

oder nach Transposition der ersten zwei Glieder und Multiplikation mit $(2m-1)'$

$$(2m-1)A_2 + (2m-1)(2m-2)(2m-3)A_4 + (2m-1)(2m-2)\ldots(2m-5)A_6 + \ldots$$

$$\ldots + (2m-1)(2m-2)\ldots 3 \,.\, A_{2m-2} = \frac{1}{2}\,\frac{m-1}{m}.$$

Setzt man weiter für ein ganzes positives r

$$A_{2r} = \frac{(-1)^{r+1} a_{2r-1}}{1.2.3\ldots(2r)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{(-1)^{r+1} a_{2r-1}}{1.2\ldots(2r-1)}$$

so wird nach Hebung mit $\frac{1}{2}$ und unter Rücksicht auf die Bezeichnung der Binomialkoeffizienten

$$\frac{1}{1}(2m-1)_1 a_1 - \frac{1}{2}(2m-1)_3 a_3 + \frac{1}{3}(2m-1)_5 a_5 - \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^m \frac{1}{m-1}(2m-1)_{2m-3} a_{2m-3} = \frac{m-1}{m}$$

woraus durch Vergleichung mit der unter No. 1) in §. 10. angegebenen Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen sogleich

$$a_{2r-1} = B_{2r-1} \text{ mithin } A_{2r} = \frac{(-1)^{r+1} B_{2r-1}}{1.2.3\ldots(2r)}$$

folgt. Nach allen diesen Bemerkungen haben wir nun unsere Untersuchung auf folgenden Punkt gebracht. Es ist nach No. 4)

Digitized by Google

$$9)\quad hf'(x) + F(x,h) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$

$$+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}h^{2m-2}}{1.2.3\ldots(2m-2)}\Delta f^{(2m-2)}(x)$$

und dabei weil $\psi(h\text{-}t) = 0$ wird wegen $A_3 = A_5 = \ldots = A_{2m-1} = 0$,

$$10)\qquad F(x,h) = \int_0^h \varphi(h\text{-}t)\, f^{(2m+1)}(x+t)dt$$

und darin

$$11)\quad \varphi(t) = \frac{t^{2m}}{(2m)'} - \tfrac{1}{2}\frac{ht^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'}$$

$$+ \frac{B_1h^2t^{2m-2}}{2'(2m\text{-}2)'} - \frac{B_3h^4t^{2m-4}}{4'(2m\text{-}4)'} + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}h^{2m-2}t^2}{(2m\text{-}2)'2'}.$$

Berücksichtigt man endlich, dass die Gleichung 8) wegen $\psi(t) = 0$ und $\psi(h\text{-}t) = 0$ in $\varphi(h\text{-}t) = \varphi(t)$ übergeht und bezeichnet man $F(x,h)$ mit $-R$, so ist

$$12)\qquad hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$

$$+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m\text{-}2)}\Delta f^{(2m-2)}(x) + R$$

und dabei

$$13)\qquad R = -\int_0^h \varphi(t) f^{(2m+1)}(x+t)dt.$$

Die Grösse R, welche man den Rest der Reihe in 12) nennen kann, bedarf nun noch einer näheren Untersuchung.

§. 12.

Restbetrachtung.

Die Funktion $\varphi(t)$, welche in dem Reste R vorkommt, besitzt eine Eigenschaft, die es möglich macht Gränzen anzugeben, zwischen denen der absolute Werth von R enthalten ist. Die erwähnte Eigenschaft besteht nämlich darin, dass die Funktion $\varphi(t)$ innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = h$ ihr Vorzeichen nicht ändert und zwar positiv oder negativ bleibt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Man erkennt diess leicht, wenn man der Reihe nach die Fälle $m = 1, 2, 3, \ldots$ betrachtet. Dieser Untersuchung selbst müssen wir jedoch eine Bemerkung vorausschicken, welche sich auf das Integral

Digitized by Google

$$\int_0^h \varphi(t)dt$$

bezieht, wovon wir später noch einmal Gebrauch machen werden. Aus der Eigenschaft $\varphi(t) = \varphi(h\text{-}t)$ folgt nämlich leicht *)

$$\int_0^h \varphi(t)dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(t)dt$$

und wenn man in beiden Integralen für $\varphi(t)$ seinen Werth substituirt, so giebt die wirkliche Ausführung der Integrationen

$$\frac{h^{2m+1}}{(2m+1)'} + \frac{A_1 h\, h^{2m}}{(2m)'}$$
$$+ \frac{A_2 h^2 h^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'} + \frac{A_4 h^4 h^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'} + \frac{A_6 h^6 h^{2m-5}}{(2m\text{-}5)'} + \ldots$$
$$= \frac{2(\frac{1}{2}h)^{2m+1}}{(2m+1)'} + \frac{2A_1 h(\frac{1}{2}h)^{2m}}{(2m)'}$$
$$+ \frac{2A_2 h^2(\frac{1}{2}h)^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'} + \frac{2A_4 h^4(\frac{1}{2}h)^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'} + \frac{2A_6 h^6(\frac{1}{2}h)^{2m-5}}{(2m\text{-}5)'} + \ldots$$

wo um grösserer Bequemlichkeit willen die früheren Coeffizienten A, welche durch die Gleichungen

$$1)\quad A_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\ A_{2r} = \frac{(-1)^{r+1}B_{2r-1}}{(2r)'}$$

mit den Bernoulli'schen Zahlen zusammenhängen, wieder benutzt worden sind. Dividirt man die obige Gleichung mit h^{2m+1} so ist weiter

---

*) Besonders anschaulich wird diess, wenn man an die geometrische Bedeutung jedes bestimmten Integrales denkt. Das obige bezeichnet, wenn $u = \varphi(t)$ als Gleichung einer Curve angesehen wird, diejenige Fläche, welche die Abscisse h zur Basis hat, und von den Ordinaten $\varphi(0)$, $\varphi(h)$ und der Curve selbst begränzt wird. Wegen $\varphi(t) = \varphi(h\text{-}t)$ besteht aber die Curve innerhalb des Intervalles 0 bis h aus zwei congruenten an einander stossenden Zügen, welche rechts und links von der zur Abscisse $t = \frac{1}{2}h$ gehörenden Ordinate symmetrisch liegen, daher sind auch die beiden Flächen congruent, welche über den Strecken von 0 bis $\frac{1}{2}h$ und von $\frac{1}{2}h$ bis h stehen. Die ganze Fläche zerfällt also in zwei gleiche Theile, von denen das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(t)dt$$

den ersten über der Abscisse $\frac{1}{2}h$ stehenden ausdrückt.

Digitized by Google

$$2)\qquad \frac{1}{(2m+1)'} + \frac{A_1}{(2m)'}$$

$$+ \frac{A_2}{(2m\text{-}1)'} + \frac{A_4}{(2m\text{-}3)'} + \frac{A_6}{(2m\text{-}5)'} + \ldots + \frac{A_{2m-2}}{3'}$$

$$= \frac{1}{(2m+1)'}\,\frac{1}{2^{2m}} + \frac{A_1}{(2m)'}\,\frac{1}{2^{2m-1}}$$

$$+ \frac{A_2}{(2m\text{-}1)'}\,\frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{A_4}{(2m\text{-}3)'}\,\frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + \frac{A_{2m-2}}{3'}\,\frac{1}{2^2}.$$

Die Summe der auf der linken Seite stehenden Reihe findet sich leicht durch die Bemerkung, dass das allgemeine Schema der Gleichungen 2) in §. 10. unter der Form

$$\frac{1}{(n+1)'} + \frac{A_1}{n'} + \frac{A_2}{(n\text{-}1)'} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{3'} + \frac{A_{n-1}}{2'}$$
$$= -A_n$$

dargestellt werden kann, woraus für $n = 2m$ und unter Berücksichtigung von $A_3 = A_5 \ldots = A_{2n-1} = 0$ sogleich die gesuchte Summe folgt. Man hat dann aus No. 2)

$$3)\qquad \frac{1}{(2m+1)'}\,\frac{1}{2^{2m}} + \frac{A_1}{(2m)'}\,\frac{1}{2^{2m-1}}$$

$$+ \frac{A_2}{(2m\text{-}1)'}\,\frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{A^4}{2m\text{-}3}\,\frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + \frac{A_{2m-2}}{3'}\,\frac{1}{2^2}$$
$$= -A_{2m}.$$

Setzt man noch den Faktor h^{2m+1} zu, so ergiebt sich das ursprüngliche Integral wieder nämlich

$$4)\qquad \int_0^h \varphi(t)dt = -A_{2m}h^{2m+1}.$$

Um den Grad der Funktion $\varphi(t)$ im Auge behalten zu können, wollen wir im Folgenden $\varphi(2m, t)$ für $\varphi(t)$ setzen, so dass also $\varphi(2, t)$, $\varphi(4, t)$, $\varphi(6, t)$ etc. die speziellen Polynome sind, die für $m = 1, 2, 3, \ldots$ aus $\varphi(t) = \varphi(2m, t)$ hervorgehen. Demnach ist

$$5)\qquad \varphi(2m, t) = \frac{t^{2m}}{(2m)'} + \frac{A_1 h t^{2m-1}}{(2m\text{-}1)'}$$

$$+ \frac{A_2 h^2 t^{2m-2}}{(2m\text{-}2)'} + \frac{A_4 h^4 t^{2m-4}}{(2m\text{-}4)'} + \ldots + \frac{A_{2m-2} h^{2m-2} t^2}{2'}$$

Digitized by Google

6) $\varphi(2m\text{-}2, t) = \frac{t^{2m-2}}{(2m\text{-}2)'} + \frac{A_1 h t^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'}$

$$+ \frac{A_2 h^2 t^{2m-4}}{(2m\text{-}4)'} + \frac{A_4 h^4 t^{2m-6}}{(2m\text{-}6)'} + \ldots. + \frac{A_{2m-4} h^{2m-4} t^2}{2'}$$

und es lässt sich nun zeigen, dass wenn $\varphi(2m\text{-}2, t)$ innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = h$ sein Vorzeichen nicht ändert, auch $\varphi(2m, t)$ innerhalb dieses Intervalles einerlei Vorzeichen aber das entgegengesetzte von dem des $\varphi(2m\text{-}2, t)$ besitzt. Hierzu bedarf es nur des Nachweises, dass diese Eigenschaft für das Intervall $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}h$ statt findet, weil sie durch die Relation $\varphi(h\text{-}t) = \varphi(t)$ sogleich auf das ganze Intervall 0 bis h ausgedehnt wird.

Betrachten wir zunächst den Differenzialquotienten von $\varphi(2m\text{-}2, t)$ nämlich

$$\frac{t^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'} + \frac{A_2 h t^{2m-4}}{(2m\text{-}4)'}$$

$$+ \frac{A_2 h^2 t^{2m-5}}{(2m\text{-}5)'} + \frac{A_4 h^4 t^{2m-7}}{(2m\text{-}7)'} + \ldots. + \frac{A_{2m-4} h^{2m-4} t}{1'}$$

und setzen wir voraus, dass derselbe während des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}h$ sein Vorzeichen nicht ändere, so findet diese Eigenschaft auch bei derjenigen Grösse statt, welche aus $\varphi'(2m\text{-}2, t)$ dadurch hervorgeht, dass man letztere Funktion mit $h^{-2m}dh$ multiplizirt und zwischen den Gränzen $h = h$ und $h = \infty$ integrirt *). Diese Grösse ist:

$$\frac{t^{2m-3}}{(2m\text{-}3)'} \frac{h^{-2m+1}}{2m\text{-}1} + \frac{A_1 t^{2m-4}}{(2m\text{-}4)'} \frac{h^{-2m+2}}{2m\text{-}2}$$

---

*) Ein bestimmtes Integral ist bekanntlich die Gränze einer Elementensumme, nämlich für $\frac{\beta\text{-}\alpha}{n} = \delta$

$$\int_\alpha^\beta \chi(h)dh = Lim[\delta\chi(\alpha) + \delta\chi(\alpha+\delta) + \delta\chi(\alpha+2\delta) + \ldots + \delta\chi(\alpha+\overline{n\text{-}1}\delta)]$$

also bedeutet die obige Integration nichts Anderes als Addition aller der Grössen, welche aus $\delta\varphi(2m\text{-}2, t)$ hervorgehen, wenn man für h der Reihe nach h, $h + \delta$, $h + 2\delta$, $h + 3\delta$, in inf. setzt und nachher δ bis zur Gränze Null abnehmen lässt. Da aber $t < \frac{1}{2}h$, so ist auch $t < h$, $t < h + \delta$, $t < h + 2\delta$, etc. und hieraus erhellt sogleich die Richtigkeit der im Texte ausgesprochenen Behauptung.

Digitized by Google

$$+ \frac{A_2 t^{2m-5}}{(2m-5)'} \frac{h^{-2m+4}}{2m-3} + \dots + \frac{A_{2m-4} t}{1'} \frac{h^{-3}}{3'}$$

und wenn man den Faktor h^{-2m+1} weglässt, so folgt, dass

$$\frac{t^{2m-3}}{(2m-3)'} \frac{1}{2m-1} + \frac{A_1 t^{2m-4}}{(2m-4)'} \frac{h}{2m-3}$$

$$+ \frac{A_2 t^{2m-5}}{(2m-5)'} \frac{h^4}{2m-3} + \dots + \frac{A_{2m-4} t}{1'} \frac{h^{2m-4}}{3}$$

einerlei Zeichen hat und zwar dasselbe wie $\varphi'(2m-2, t)$. Dasselbe Vorzeichen kommt offenbar auch Dem zu, was aus dem Vorstehenden wird, sobald man es mit dt multiplizirt und zwischen den Gränzen $t = t$ und $t = \frac{1}{2}h$ integrirt, weil hierbei t immer kleiner als die obere Integrationsgränze $\frac{1}{2}h$ bleibt. Die Ausführung dieser Integration giebt:

$$\frac{(\frac{1}{2}h)^{2m-2}}{(2m-1)'} + \frac{A_1 h (\frac{1}{2}h)^{2m-3}}{(2m-2)'}$$

$$+ \frac{A_2 h^2 (\frac{1}{2}h)^{2m-4}}{(2m-3)'} + \frac{A_4 h^4 (\frac{1}{2}h)^{2m-6}}{(2m-5)'} + \dots + \frac{A_{2m-4} h^{2m-4} (\frac{1}{2}h)^2}{3'}$$

$$- \Big[\frac{t^{2m-2}}{(2m-1)'} + \frac{A_1 h t^{2m-3}}{(2m-2)'}$$

$$+ \frac{A_2 h^2 t^{2m-4}}{(2m-3)'} + \frac{A_4 h^4 t^{2m-6}}{(2m-5)'} + \dots + \frac{A_{2m-4} h^{2m-4} t^2}{3'} \Big].$$

Sondert man von der ersten Reihe den gemeinschaftlichen Faktor h^{2m-2} ab, so ist das Uebrige nach Formel 3) summirbar, indem man dort m-1 für m schreibt. Multiplizirt man noch mit t, so folgt jetzt, dass der Ausdruck

$$- \Big[\frac{t^{2m-1}}{(2m-1)'} + \frac{A_1 h t^{2m-2}}{(2m-2)'}$$

$$+ \frac{A_2 h^2 t^{2m-3}}{(2m-3)'} + \frac{A_4 h^4 t^{2m-5}}{(2m-5)'} + \dots + \frac{A_{2m-4} h^{2m-4} t^2}{3'} + \frac{A_{2m-2} h^{2m-2}}{1'} \Big]$$

innerhalb des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}h$ sein Vorzeichen nicht ändert und zwar dasselbe behält mit $\varphi'(2m-2, t)$. Berücksichtigt man aber, dass die vorstehende Reihe abgesehen vom Vorzeichen $= \varphi'(2m, t)$ ist, so erhält man den Satz: „die Funktionen $\varphi'(2m-2, t)$ und $\varphi'(2m, t)$ ändern innerhalb des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}h$ ihre Vorzeichen nicht, das Vorzeichen der letzteren aber ist das Entgegengesetzte von dem der ersteren.“ Wenn nun $\varphi'(t)$ positiv bleibt, so wächst $\varphi(t)$ einem be-

Digitized by Google

kannten Theoreme zufolge eben so lange als $\varphi'(t)$ das positive Zeichen behält, da aber $\varphi(t)$ für $t=0$ verschwindet, so fängt die letztere Funktion ihr Wachsthum bei Null an und bleibt mithin stets positiv; ist dagegen $\varphi'(t)$ eine Strecke lang negativ, so nimmt $\varphi(t)$ eben so lange ab, da aber diese Abnahme bei Null anfängt, so bleibt dann $\varphi(t)$ negativ, es sind also $\varphi'(2m,t)$ und $\varphi(2m,t)$ immer zugleich positiv oder negativ; dasselbe gilt natürlich auch von $\varphi'(2m\text{-}2,t)$ und $\varphi(2m\text{-}2,t)$ und daher können wir den vorigen Satzt jetzt folgendermaassen aussprechen: „die Funktionen $\varphi(2m\text{-}2,t)$ und $\varphi(2m,t)$ ändern während des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}h$ ihre Vorzeichen nicht; das Vorzeichen der letzteren ist aber das Entgegengesetzte von dem der ersteren.“ Fangen wir nun beim einfachsten Falle an, so ist für $m=1$

$$\varphi(2,t) = \frac{t^2}{2'} + \frac{A_1 ht}{1'} = \frac{t}{2}(t\text{-}h)$$

negativ von $t=0$ bis $t=\frac{1}{2}h$, mithin ist während desselben Intervalles $\varphi(4,t)$ positiv, $\varphi(6,t)$ negativ u. s. f. also $\varphi(2m,t)$ positiv oder negativ, jenachdem m gerade oder ungerade ausfällt. Nach der früheren Bemerkung folgt daraus, dass $\varphi(t)$ während des ganzen Intervalles 0 bis h einerlei Vorzeichen hat.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Restes

$$R = -\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\varphi(t)dt.$$

Nennen wir $t=\alpha$ und $t=\beta$ diejenigen innerhalb des Intervalles 0 bis h liegenden Werthe von t, für welche $f^{(2m+1)}(x+t)$ den grössten und kleinsten unter allen den Werthen annimmt, die ihm innerhalb jenes Intervalles zukommen, so sind die Differenzen

$$f^{(2m+1)}(x+t) - f^{(2m+1)}(x+\alpha)$$

und

$$f^{(2m+1)}(x+t) - f^{(2m+1)}(x+\beta)$$

von entgegengesetzten Vorzeichen. Da nach dem oben Bewiesenen $\varphi(t)$ von $t=0$ bis $t=h$ sein Zeichen nicht wechselt, so folgt hieraus, dass auch

$$[f^{(2m+1)}(x+t) - f^{(2m+1)}(x+\alpha)]\varphi(t)$$
$$[f^{(2m+1)}(x+t) - f^{(2m+1)}(x+\beta)]\varphi(t)$$

Digitized by Google

von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Dasselbe gilt von Dem, was hieraus hervorgeht, wenn man mit dt multiplizirt und innerhalb der Gränzen $t = 0$ bis $t = h$ integrirt. Daraus aber, dass die Differenzen

$$\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\varphi(t)dt - f^{(2m+1)}(x+\alpha)\int_0^h \varphi(t)dt$$

$$\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\varphi(t)dt - f^{(2m+1)}(x+\beta)\int_0^h \varphi(t)dt$$

entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, folgt dass der Werth von

$$\int_0^h f^{(2m+1}(x+t)\varphi(t)dt$$

zwischen den Grössen

$$f^{(2m+1)}(x+\alpha)\int_0^h \varphi(t)dt \text{ und } f^{(2m+1)}(x+\beta)\int_0^h \varphi(t)dt$$

d. h. zwischen

$$f^{(2m+1)}(x+\alpha)[-A_{2m}h^{2m+1}] \text{ und } f^{(2m+1)}(x+\beta)[-A_{2m}h^{2m+1}]$$

enthalten ist. Es liegt mithin

$$R \text{ zwischen } A_{2m}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(x+\alpha)$$
$$\text{und } A_{2m}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(x+\beta).$$

Betrachten wir nun die Differenz

$$R - A_{2m}h^{2m+1}f^{(2m+1}(x+\tau)$$

und lassen wir darin τ das Intervall $\tau = 0$ bis $\tau = h$ durchlaufen, so wird dem Vorigen zufolge diese Differenz vom Negativen zum Positiven oder umgekehrt übergehen, weil unter den Werthen von τ auch die $\tau = \alpha$ und $\tau = \beta$ vorkommen müssen. Vorausgesetzt, dass die ganze Differenz eine stetige und endliche Funktion von τ darstellt, wozu Stetigkeit und Endlichkeit von $f^{(2m+1)}(x+\tau)$ von $\tau = 0$ bis $\tau = h$ gehört, so schliesst man daraus, dass es einen Werth τ' von τ giebt, für welchen jene Differenz auf Null reduzirt also

$$R = A_{2m}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(x+\tau')$$

wird. Da $h > \tau' > 0$ ist, kann man $\tau' = \lambda h$ setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet und dann hat man

$$R = A_{2m}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(x+\lambda h).$$

Setzen wir für A_{2m} seinen Werth durch B_{2m-1} ausgedrückt, so kön-

Digitized by Google

nen wir das Endresultat der ganzen Untersuchung in folgendem Theoreme zusammenfassen:

Bleibt der $(2m+1)^{ter}$ Differenzialquotient einer beliebigen Funktion $f(u)$ endlich und stetig innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$, so gilt die Gleichung

$$7) \qquad hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3} h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\Delta f^{(2m-2)}(x)$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1} B_{2m-1} h^{2m+1}}{1.3.3\ldots(2m)} f^{(2m+1)}(x+\lambda h)$$

worin λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet.

Es giebt noch eine zweite Form des Restes, die zwar der so eben entwickelten an Allgemeinheit nachsteht, aber wegen ihrer häufigen Anwendbarkeit wichtig ist. Setzen wir nämlich voraus, dass $f^{(2m+1)}(x+t)$ sein Vorzeichen innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = h$ nicht ändert, und bezeichnen wir mit $t = a$ und $t = b$ diejenigen Werthe von t, für welche $\varphi(t)$ innerhalb des genannten Intervalles sein Maximum und Minimum erreicht, so lässt sich durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung leicht zeigen, dass das Integral

$$8) \qquad \int_0^h \varphi(t) f^{(2m+1)}(x+t)\,dt$$

zwischen den Grössen

$$\varphi(a)\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\,dt \text{ und } \varphi(b)\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\,dt$$

d. h. zwischen

$$\varphi(a)[f^{(2m)}(x+h) - f(x)] = \varphi(a)\Delta f^{(2m)}(x)$$
$$\text{und} \quad \varphi(b)[f^{(2m)}(x+h) - f(x)] = \varphi(b)\Delta f^{(2m)}(x)$$

enthalten ist. Das Maximum $\varphi(a)$ und das Minimum $\varphi(b)$ sind aber leicht zu bestimmen. Wir wissen nämlich, dass $\varphi'(t)$ für ein gerades m innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}h$ positiv bleibt und folglich $\varphi(t)$ während dieser Strecke immer wächst, sein Wachsthum mit dem Werthe $\varphi(0) = 0$ anfangend. Ferner ist $\varphi(h-t) = \varphi(t)$, mithin nimmt die Funktion von $t = \frac{1}{2}h$ bis $t = h$ ebenso ab, wie sie

Digitized by Google

in dem vorhergehenden Intervalle zugenommen hat, sie muss folglich für $t = \frac{1}{2}h$ ihr Maximum erreichen und ihr Minimum ist $\varphi(0) = 0$. Bei ungeraden m dagegen ist $\varphi'(t)$ negativ von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}h$ und daher nimmt $\varphi(t)$ während dieser Strecke ab, seine Abnahme mit $\varphi(0) = 0$ beginnend. Aus $\varphi(h-t) = \varphi(t)$ folgt hier ganz wie vorhin, dass für $t = \frac{1}{2}h$ die Funktion ihr Minimum erreicht. Wir haben demnach

$$\text{für gerade } m\,,\quad \varphi(a) = \varphi(\tfrac{1}{2}h)\,,\quad \varphi(b) = 0$$

$$\text{für ungerade } m\,,\quad \varphi(a) = 0\,,\quad \varphi(b) = \varphi(\tfrac{1}{2}h)$$

und wenn wir beides zusammenfassen; so liegt in jedem Falle das Integral 8) zwischen 0 und $\varphi(\frac{1}{2}h)\Delta f^{(2m)}(x)$; wir können daher

$$9)\quad \int_0^h \varphi(t) f^{(2m+1)}(x+t)\,dt = \lambda\varphi(\tfrac{1}{2}h)\Delta f^{(2m)}(x)$$

setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Der Werth von $\varphi(\frac{1}{2}h)$ findet sich leicht nach einer früheren Formel; nach No. 11) in §. 11. ist nämlich

$$\varphi(\tfrac{1}{2}h) = h^{2m}\left[\frac{(\frac{1}{2})^{2m}}{(2m)'} - \frac{1}{2}\,\frac{(\frac{1}{2})^{2m-1}}{(2m-1)'}\right.$$
$$\left. + \frac{B_1(\frac{1}{2})^{2m-2}}{2'(2m-2)'} - \frac{B_3(\frac{1}{2})^{2m-4}}{4'(2m-4)'} + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}(\frac{1}{2})^2}{(2m-2)'2'}\right]$$

d. i. nach Formel 2) in §. 10.

$$\varphi(\tfrac{1}{2}h) = \frac{(-1)^m}{(2m)'}\,\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_{2m-1} h^{2m}.$$

Substituiren wir diess in die Gleichung 9) und berücksichtigen, dass jenes Integral negativ genommen den Werth von R darstellt, so gelangen wir zu dem Theoreme:

Wenn der $(2m+1)^{\text{te}}$ Differenzialquotient von $f(u)$ innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$ endlich und stetig bleibt, zugleich aber sein Vorzeichen nicht ändert, so gilt die Gleichung

$$10)\quad hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3} h^{2m-2}}{1.2.3\ldots(2m-2)}\Delta f^{(2m-2)}(x)$$
$$+ (-1)^{m+1}\lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\,\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2.3\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x).$$

Digitized by Google

Denkt man sich auf der rechten Seite noch den Ausdruck

$$0 = (-1)^{m+1}\left[\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\,..\,(2m)}\Delta f^{(2m)}(x) - \frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\,..\,(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)\right]$$

zugesetzt, so verwandelt sich die Gleichung in die folgende

$$11)\quad hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\,..\,(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$

$$+ (-1)^{m+1}\left[\lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right]\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x).$$

Da $1 > \lambda > 0$, so ist hier

$$\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1 > \lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1 > -1$$

oder weil die linke Seite kürzer durch $1 - \frac{1}{2^{2m-1}}$ ausgedrückt werden kann, auch

$$1 > \lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1 > -1$$

woraus man erkennt, dass der eingeklammerte Faktor des letzten Gliedes in No. 11) seinem absoluten Werthe nach unter der Einheit liegt; in welchen Fällen derselbe positiv und in welchen er negativ ist, entscheidet sich leicht, wenn man in der ganz allgemeinen Formel 7) $m+1$ für m schreibt und das so Entstandene mit No. 11) vergleicht. Man findet so

$$\frac{B_{2m+1}h^{2m+3}}{1.2\ldots(2m+2)}f^{(2m+3)}(x+\lambda h) = -\left[\lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right]\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$

d. i.

$$= -\left[\lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right]\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1.2.3\,..\,(2m)}\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\,dt.$$

Haben nun $f^{(2m+1)}(u)$ und $f^{(2m+3)}(u)$ innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$ gleiche Vorzeichen, so kommt dasselbe Vorzeichen auch dem Integrale auf der rechten Seite zu, und folglich muss jetzt

$$\lambda\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1$$

negativ sein, weil sonst zwei von Null verschiedene aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Grössen einander gleich sein müss-

Digitized by Google

ten. Haben dagegen $f^{(2m+1)}(u)$ und $f^{(2m+3)}(u)$ ungleiche Vorzeichen, so folgt aus ähnlichen Gründen, dass

$$\lambda \frac{2^{2m}-1}{2^{m-1}} - 1$$

positiv ausfallen muss. Setzen wir den in Rede stehenden Ausdruck im ersten Falle $= -\varkappa$ und im zweiten $= +\varkappa$, wo $\varkappa$ immer einen positiven ächten Bruch bezeichuet, so haben wir das Theorem:

Sei $f(u)$ eine Funktion deren $(2m+3)^{\text{ter}}$ Differenzialquotient endlich und stetig bleibt von $u = x$ bis $u = x + h$. Setzt man ferner voraus, dass $f^{(2m+1)}(u)$ und $f^{(2m+3)}(u)$ während desselben Intervalles ihre Vorzeichen nicht wechseln, so ist, wenn beide gleiche Vorzeichen haben,

12) $$hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$
$$+ \frac{(-1)^m \varkappa B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$

und wenn sie ungleiche Vorzeichen besitzen

13) $$hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$
$$+ \frac{(-1)^{m-1}\varkappa B_{2m-1}h^{2m}}{1.2\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$

wobei immer $\varkappa$ eine zwischen 0 und + 1 fallende Grösse bezeichnet.

Sind also die aufgestellten Bedingungen erfüllt, so beträgt der Rest seinem absoluten Werthe nach jedesmal weniger als das zuletzt in Rechnung gebrachte Glied der Reihe, wodurch man immer im Stande ist, Gränzen für den begangenen Fehler anzugeben.

Vereinigt man endlich noch in No. 12) das letzte Glied der Reihe dadurch mit dem Reste, dass man $1 - \varkappa = \lambda$ setzt, so erhält man den Satz:

Wenn der $(2m+1)^{\text{te}}$ und $(2m+3)^{\text{te}}$ Differenzialquotient von $f(u)$ innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$ endlich und stetig bleiben und während desselben gleichzeitig entweder positiv oder negativ bleiben, so ist

Digitized by Google

14) $$hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x)$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{IV}(x) + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3} h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m\text{-}2)}\Delta f^{(2m-2)}(x)$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}\lambda B_{2m-1} h^{2m}}{1.2.3\ldots(2m)}\Delta f^{(2m)}(x)$$

wo λ eine zwischen 0 und + 1 fallende Grösse bezeichnet. Hier macht also der Rest einen aliquoten Theil desjenigen Gliedes aus, welches folgen würde, wenn man die Reihe weiter fortsetzen wollte.

In den folgenden Paragraphen werden wir nun eine Reihe von Beispielen für die allgemeinen Theoreme dieses Paragraphen entwickeln und zwar werden wir solche wählen, die in verschiedenen höheren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen.

§. 13.

Entwickelung von $h : (e^h\text{-}1)$.

Die einfachste Substitution, welche man für $f(u)$ treffen kann, ist $f(u) = e^u$, sie giebt für ein positives ganzes r

$$f^{(r)}(u) = e^u, \quad \Delta f^{(r)}(u) = (e^h\text{-}1)e^u$$

und da $f^{(r)}(u)$ für endliche reelle u sich continuirlich ändert ohne unendlich zu werden und da ferner sämmtliche Differenzialquotienten positiv bleiben, so ist nach No. 14) im vorigen Paragraphen für alle möglichen x und h

$$he^x = (e^h\text{-}1)e^x - \tfrac{1}{2}h(e^h\text{-}1)e^x$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}(e^h\text{-}1)e^x - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}(e^h\text{-}1)e^x + \frac{B_5 h^6}{1.2\ldots 6}(e^h\text{-}1)e^x - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3} h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m\text{-}2)}(e^h\text{-}1)e^x + \frac{(-1)^{m+1}\lambda B_{2m-1} h^{2m}}{1.2.3\ldots(2m)}(e^h\text{-}1)e^x$$

oder nach beiderseitiger Division mit $(e^h\text{-}1)e^x$

1) $$\frac{h}{e^h\text{-}1} = 1 - \tfrac{1}{2}h$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-} h^{2m-2}}{1.2.3\ldots(2m\text{-}2)}$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}\lambda B_{2m-1} h^{2m}}{1.2.3\ldots(2m)}$$

Digitized by Google

Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, diese Reihe in's Unendliche fortzusetzen, so dass nach Transposition des Restes und durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende m

$$2)\quad \frac{h}{e^h-1} + (-1)^m \, Lim \, \frac{\lambda B_{2m-1} h^{2m}}{1.2 \ldots (2m)} = 1 - \tfrac{1}{2}h$$

$$+ \frac{B_1 h_2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{B_5 h^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots \text{ in inf.}$$

werden würde. Der links vorkommende Gränzwerth bestimmt sich leicht, sobald man sich erinnert, dass eine Funktion $\psi(m)$ für unendlich wachsende m unbegränzt ab- oder zunimmt, jenachdem der Quotient $\frac{\psi(m+1)}{\psi(m)}$ von einer gewissen angebbaren Stelle an kleiner oder grösser als die Einheit wird und bleibt, oder jenachdem

$$Lim \, \frac{\psi(m+1)}{\psi(m)} < 1 \text{ oder } > 1$$

ausfällt *). In unserem Falle wäre nun zu setzen

$$3)\quad \psi(m) = \frac{B_{2m-1} h^{2m}}{1.2.3 \ldots (2m)}.$$

Da aber andererseits nach einer bekannten Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen

$$\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots = \frac{2^{2m-1} B_{2m-1} \pi^{2m}}{1.2.3 \ldots (2m)}$$

also, die Summe der links stehenden Reihe kurz mit S_{2m} bezeichnet,

$$\frac{B_{2m-1}}{1.2.3 \ldots (2m)} = \frac{S_{2m}}{2^{2m-1} \pi^{2m}}$$

ist, so kann man an die Stelle der Gleichung 3) die folgende setzen

$$\psi(m) = \frac{S_{2m} h^{2m}}{2^{2m-1} \pi^{2m}}.$$

Daraus ergiebt sich nun für unendlich wachsende m

$$Lim \, \frac{\psi(m+1)}{\psi(m)} = Lim \left[\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{S_{2m+2}}{S_{2m}} \right] = \left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass $Lim \, [S_{2m+2} : S_{2m}] = 1$ ist.

---

*) M. s. des Verf. Handbuch der Differenzialrechnung §. 37.

Digitized by Google

Für $\frac{h}{2\pi} < 1$ also $h < 2\pi$ wird jetzt dem oben erwähnten Theoreme zufolge $Lim\,\psi(m) = 0$, mithin, weil λ einen ächten Bruch bezeichnet, auch $Lim\,[\lambda\,\psi(m)] = 0$ und wenn wir diess der Bedeutung von $\psi(m)$ gemäss für die Gleichung 2) benutzen, so ist

$$4)\quad \frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{B_5 h^6}{1.2\ldots6} - \ldots.$$

wobei der absolute Werth von $h < 2\pi$ sein muss.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn der absolute Werth von h ebensoviel oder mehr beträgt als 2π. Zwar behält die Gleichung 2) auch hier ihre Geltung, aber man kann jetzt die Reihe nicht mehr in's Unendliche fortsetzen ohne sie divergent werden zu lassen und auf ein in jeder Beziehung unbrauchbares Resultat zu kommen. Will man sich die Mühe nehmen den Rest mit Hülfe des Integrales

$$\int_0^h f^{(2m+1)}(x+t)\varphi(t)dt$$

zu berechnen, indem man die hier angedeutete Quadratur ausführt, so kann man allerdings zu einem vollkommen genauen Resultate gelangen, dieser Weg würde jedoch viel mehr Umstände verursachen als die direkte Berechnung der auf der linken Seite stehenden Grösse. Gleichwohl aber ist die Formel 1) in so fern brauchbar, als sie eine Reihe von Gränzen liefert, zwischen denen der Quotient $h:(e^h-1)$ enthalten ist. Denn setzt man der Reihe nach $m = 2, 3, 4, \ldots$ so gelten die Gleichungen

$$\frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{\lambda B_3 h^4}{1.2.3.4}$$

$$\frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{\lambda B_5 h^6}{1.2\ldots6}$$

$$\frac{h}{e^h-1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{B_5 h^6}{1.2\ldots6} - \frac{\lambda B_7 h^8}{1.2\ldots8}$$

. . . .

und aus ihnen folgen wegen $1 > \lambda > 0$ die Ungleichungen

Digitized by Google

$$\frac{h}{e^h-1} < 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2}$$

$$\frac{h}{e^h-1} > 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}$$

$$\frac{h}{e^h-1} < 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{B_5 h^6}{1.2..6}$$

$$\frac{h}{e^h-1} > 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \frac{B_5 h^6}{1.2..6} - \frac{B_7 h^8}{1.2..8}$$

u. s. w.

Finden sich unter diesen ein paar benachbarte, welche in einer Partie Dezimalstellen übereinstimmen, so hat man auf eben so viel Dezimalstellen auch die links stehende Grösse berechnet.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Formel 4) zu einer independenten Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen benutzt werden kann, sobald man die auf der linken Seite stehende Funktion von h mittelst des Theoremes von *Mac Laurin* in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandelt und die Coeffizienten beider Reihen mit einander vergleicht. Für

$$\varphi(h) = \frac{h}{e^h-1}$$

ist nämlich zufolge des eben erwähnten Satzes

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} h + \frac{\varphi''(0)}{1.2} h^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3} h^3 + \ldots.$$

und wenn wir diess mit No. 4) vergleichen, so ist offenbar für $m > 1$,

$$5) \quad B_{2m-1} = (-1)^{m+1} \varphi^{(2m)}(0).$$

Wollte man den rechts vorkommenden Differenzialquotienten auf gewöhnliche Weise zu entwickeln versuchen, so erhielte man denselben unter der vieldeutigen Form $\frac{0}{0}$ und wir müssen daher einen anderen Weg einschlagen. Setzen wir

$$6) \quad \psi(h) = \frac{h}{e^h+1}$$

so ist identisch, wie man leicht einsieht,

$$\varphi(h) = \varphi(\tfrac{1}{2}h) - \psi(\tfrac{1}{2}h)$$

mithin für ein ganzes positives n

Digitized by Google

$$\varphi^{(n)}(h) = (\tfrac{1}{2})^n \varphi^{(n)}(\tfrac{1}{2}h) - (\tfrac{1}{2})^n \psi^{(n)}(\tfrac{1}{2}h)$$

und für $h = 0$ nach Multiplikation mit 2^n

$$2^n \varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0) - \psi^{(n)}(0).$$

Hieraus ergiebt sich zwischen $\varphi^{(n)}(0)$ und $\psi^{(n)}(0)$ die Relation

$$\varphi^{(n)}(0) = -\frac{1}{2^n - 1}\psi^{(n)}(0)$$

wo nun $\psi^{(n)}(0)$ offenbar nicht unter die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ gerathen kann. Um also nach der Formel 5) oder

$$7) \quad B_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{2^{-m}-1}\psi^{(2m)}(0)$$

die Bernoulli'schen Zahlen berechnen zu können, müssen wir zunächst $\psi^{(n)}(0)$ entwickeln, was auf folgende Weise geschieht. Zufolge der bekannten Formel

$$\frac{d^n(uv)}{dh^n} = n_0 u \frac{d^n v}{dh^n} + n_1 \frac{du}{dh}\frac{d^{n-1}v}{dh^{n-1}} + n_2 \frac{d^2u}{dh^2}\frac{d^{n-2}v}{dh^{n-2}} + \ldots.$$

ergiebt sich zunächst

$$\psi^{(n)}(h) = \frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{h}{e^h+1}\right)$$

$$= n_0 h \frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{1}{e^h+1}\right) + n_1 \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right)$$

und wenn $h = 0$ genommen wird

$$8) \quad \psi^{(n)}(0) = n\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right), \quad (\text{für } h = 0).$$

Man hat ferner durch wirkliche successive Differenziation

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{e^h+1}\right) = \frac{-e^h}{(e^h+1)^2}, \quad \frac{d^2}{dh^2}\left(\frac{1}{e^h+1}\right) = \frac{e^{2h}-e^h}{(e^h+1)^3}, \ldots.$$

wobei man leicht die Form dieser Gleichungen entdeckt, nämlich

$$\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right)$$

$$= \frac{K_1 e^{(n-1)h} + K_2 e^{(n-2)h} + K_3 e^{(n-3)h} + \ldots + K_{n-1}e^h}{(e^h+1)^n}$$

worin $K_1, K_2, \ldots K_n$ gewisse noch unbekannte numerische Coeffizienten sind, deren Werthe auf folgendem Wege gefunden werden. Es ist

$$9) \quad (e^h+1)^n \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right)$$

$$= K_1 e^{(n-1)h} + K_2 e^{(n-2)h} + K_3 e^{(n-3)h} + \ldots + K_{n-1}e^h.$$

Digitized by Google

Ferner hat man für positive $h > 0$,

$$\frac{1}{e^h+1} = \frac{e^{-h}}{1+e^{-h}} = e^{-h} - e^{-2h} + e^{-3h} - \dots$$

folglich

$$\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right) = (-1)^{n-1}[1^{n-1}e^{-h} - 2^{n-1}e^{-2h} + 3^{n-1}e^{-3h} - \dots]$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $(e^h+1)^n$, ordnet rechts Alles nach absteigenden Potenzen von e^h, so wird

$$(-1)^{n-1}(e^h+1)^n \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right)$$
$$= e^{(n-1)h} - [2^{n-1} - n_1]e^{(n-2)h}$$
$$+ [3^{n-1} - n_1 2^{n-1} + n_2]e^{(n-3)h}$$
$$- [4^{n-1} - n_1 3^{n-1} + n_2 2^{n-1} - n_3]e^{(n-4)h}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots$$

wobei rechts das mit e^h versehene Glied das letzte sein muss, wie in No. 9). Für $h = 0$ wird nun

$$\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right), \quad (h = 0)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\left[1 - [2^{n-1} - n_1] + [3^{n-1} - n_1 2^{n-1} + n_2] - \dots\right]$$

oder wenn wir die Bezeichnung

$$10) \quad \overset{n}{L}_p = p^{n-1} - n_1(p-1)^{n-1} + n_2(p-2)^{n-1} - \dots$$

einführen,

$$\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{1}{e^h+1}\right), \quad (h = 0)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\left\{\overset{n}{L}_1 - \overset{n}{L}_2 + \overset{n}{L}_3 - \overset{n}{L}_4 + \dots\right\}$$

Hieraus ergiebt sich endlich nach 8) und 7) für $n = 2m$

$$B_{2m-1} = \frac{(-1)^{m+1}m}{2^{2m-1}(2^{2m}-1)}\left\{\overset{2m}{L}_1 - \overset{2m}{L}_2 + \overset{2m}{L}_3 - \dots\right\}$$

wie zuerst *Laplace* gezeigt hat.

Digitized by Google

§. 14.

Entwickelung von $\Gamma(x)$.

Als zweites und sehr wichtiges Beispiel betrachten wir diejenige Funktion, welche durch die Gleichung

$$1)\quad \varphi(u) = \int_0^\infty \vartheta^{u-1} e^{-\vartheta} d\vartheta$$

definirt wird und für welche man die ausschliessliche Bezeichnung $\Gamma(u)$ eingeführt hat. In dem Falle wo u eine positive ganze Zahl ist, lässt sich der Werth des Integrales rechts ohne Schwierigkeit entwickeln man findet nämlich

$$2)\quad \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 1.2,\ \Gamma(4) = 1.2.3,\ \ldots.$$
$$\Gamma(k) = 1.2.3 \ldots. (k\text{-}1)$$

für andere u dagegen bildet $\Gamma(u)$ eine eigenthümliche Transscendente, welche für positive u stets endlich und stetig bleibt, für jedes negative u dagegen unendlich wird. Ferner besitzt dieselbe folgende für unsere Entwickelungen wichtigen Eigenschaften *).

$$3)\quad \Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$$

$$4)\quad \frac{\Gamma(u)\Gamma(u+\frac{1}{2})}{\Gamma(2u)} = 2^{\frac{1}{2}-2u}\sqrt{2\pi}$$

$$5)\quad \frac{d\Gamma(u)}{du} : \Gamma(u) = \frac{dl\Gamma(u)}{du} = \int_0^\infty d\omega \left[\frac{e^{-\omega}}{\omega} - \frac{e^{-u\omega}}{1\text{-}e^{-\omega}}\right].$$

Um nun die Formeln des §. 12. anzuwenden, setzen wir $f(u) = l\Gamma(u)$; es ist dann

$$f'(u) = \int_0^\infty d\omega \left[\frac{e^{-\omega}}{\omega} - \frac{e^{-u\omega}}{1\text{-}e^{-\omega}}\right]$$

$$f''(u) = \int_0^\infty d\omega \frac{\omega e^{-u\omega}}{1\text{-}e^{-\omega}}$$

---

*) Theorie und Tafel der ebenso wichtigen als interessanten Gammafunktionen findet man in des Verf. Werke: Analytische Studien.

Digitized by Google

$$f^{IV}(u) = \int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega^3 e^{-u\omega}}{1-e^{-\omega}}$$

überhaupt für ein ganzes positives r

$$f^{(2r)}(u) = \int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega^{2r-1} e^{-u\omega}}{1-e^{-\omega}}.$$

Nehmen wir weiter $h = 1$, so wird

$$\Delta f^{(2r)}(u) = \int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega^{2r-1}}{1-e^{-\omega}} \left[e^{-(u+1)\omega} - e^{-u\omega}\right] = -\int_0^\infty \omega^{2r-1} e^{-u\omega} d\omega$$

und den Werth des Integrales rechts findet man, wenn man in der Gleichung 1) $u = 2r$ und $\vartheta = u\omega$ setzt; es ist nämlich

$$\Delta f^{(2r)}(u) = -\frac{\Gamma(2r)}{u^{2r}} = -\frac{1.2.3 \dots (2r-1)}{u^{2r}}.$$

Berücksichtigen wir nun, dass für jedes positive u die Funktionen $f^{(2m+1)}(u)$ und $f^{(2m+3)}(u)$ endlich und stetig bleiben und durchaus dasselbe Vorzeichen besitzen, so ist jetzt nach der 14ten Formel in §. 12. und unter der Rücksicht, dass $\Delta f(u) = l\Gamma(u+1) - l\Gamma(u) = lu$ ist,

$$6)\quad \frac{dl\Gamma(x)}{dx} = lx - \tfrac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{4}\frac{1}{x^4} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{m-1}B_{2m-3}}{2m-2}\frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{(-1)^m \lambda B_{2m-1}}{2m}\frac{1}{x^{2m}}.$$

Um hieraus eine Formel für $l\Gamma(x)$ und dann für $\Gamma(x)$ abzuleiten multipliziren wir überall mit dx und integriren zwischen den Gränzen $x = x$, $x = a$, wo a eine positive noch unbestimmte Grösse bezeichnet; es wird dann

$$l\Gamma(x) - l\Gamma(a) = (x - \tfrac{1}{2})\, lx - x - [(a - \tfrac{1}{2})\, la - a]$$
$$+ \frac{B_1}{1.2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) - \frac{B_3}{3.4}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{B_5}{5.6}\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{a^5}\right) - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}\left(\frac{1}{x^{2m-3}} - \frac{1}{a^{2m-3}}\right) + \frac{(-1)^m B_{2m-1}}{2m}\int_a^x \frac{\lambda}{x^{2m}}\, dx.$$

Das zuletzt vorkommende Integral liegt aber wegen $1 > \lambda > 0$ zwischen den Gränzen

Digitized by Google

$$0 \text{ und } \int_a^x \frac{1}{x^{2m}}\, dx = -\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{x^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$$

und bildet daher einen Bruchtheil des letzten Ausdrucks. Nennen wir $\varkappa$ eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse, so dürfen wir aus diesem Grunde

$$\int_a^x \frac{\lambda}{x^{2m}}\, dx = -\frac{\varkappa}{2m-1}\left(\frac{1}{x^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$$

setzen und die vorige Gleichung lässt sich nun durch Vereinigung der Grössen

$$l\Gamma(a) \text{ und } (a-\tfrac{1}{2})\, la - a = l\left(\frac{a^{a-\frac{1}{2}}}{e^a}\right)$$

in folgende Form bringen:

$$l\Gamma(x) = l\left[\frac{e^a\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}}}\right] + (x-\tfrac{1}{2})lx - x$$

$$+\frac{B_1}{1.2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right) - \frac{B_3}{3.4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{a^3}\right) + \frac{B_5}{5.6}\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{a^5}\right) - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}\left(\frac{1}{x^{2m-3}}-\frac{1}{a^{2m-3}}\right) + \frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}\left(\frac{1}{x^{2m-1}}-\frac{1}{a^{2m-1}}\right).$$

Durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende a, wobei

$$7)\qquad Lim\left[\frac{e^a\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}}}\right] = A$$

sein möge, giebt diese Gleichung

$$8)\qquad l\Gamma(x) = lA + (x-\tfrac{1}{2})\, lx - x$$

$$+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}\frac{1}{x^{2m-3}}$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}\frac{1}{x^{2m-1}}$$

und hier kommt es nun noch auf die Bestimmung von A an, dessen Werth offenbar ein endlicher und angebbarer sein muss, weil sonst eine bestimmte Grösse einer unbestimmten gleich sein würde. Setzen wir

$$\frac{e^a\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}}} = \psi(a)$$

wo nun $\psi(\infty) = A$ ist, so haben wir

Digitized by Google

$$\frac{\psi(a)\psi(a+\frac{1}{2})}{\psi(2a)} = \frac{e^a e^{a+\frac{1}{2}}}{e^{2a}} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2a)} \cdot \frac{(2a)^{2a-\frac{1}{2}}}{a^{a-\frac{1}{2}}(a+\frac{1}{2})^a}$$

oder wenn wir nach möglichster Hebung die Formel 4) anwenden

$$\frac{\psi(a)\psi(a+\frac{1}{2})}{\psi(2a)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{a^a}{(a+\frac{1}{2})^a} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{2a})^a}.$$

Lassen wir a in's Unendliche wachsen und berücksichtigen, dass erstlich

$$Lim\left[\left(1+\frac{1}{2a}\right)^a\right] = e^{\frac{1}{2}}$$

und dass zweitens der Gränzwerth der linken Seite $= \frac{AA}{A} = A$ ist, so ergiebt sich $A = \sqrt{2\pi}$ und nach No. 8)

$$9)\qquad l\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x-\tfrac{1}{2})\,lx - x$$
$$+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m\text{-}3)(2m\text{-}2)}\frac{1}{x^{2m-3}}$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m\text{-}1)(2m)}\frac{1}{x^{2m-1}}.$$

Durch beiderseitige Addition und Anwendung der Formel 3) wird hieraus noch

$$10)\qquad l\Gamma(1+x) = \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x$$
$$+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m\text{-}3)(2m\text{-}2)}\frac{1}{x^{2m-3}}$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m\text{-}1)(2m)}\frac{1}{x^{2m-1}}.$$

Um nun zu $\Gamma(1+x)$ zurückzugelangen, setzen wir

$$11)\quad \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m\text{-}3)(2m\text{-}2)}\frac{1}{x^{2m-3}}$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m\text{-}1)(2m)}\frac{1}{x^{2m-1}} = \varphi(x,m)$$

und dann findet sich ohne Schwierigkeit

$$12)\qquad \Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\varphi(x,m)}.$$

Wollte man auch in diesen Formeln die Reihen dadurch zu unendlichen machen, dass man m unbegränzt anwachsen liesse, so würde man auf kein brauchbares Resultat kommen, denn es lässt sich leicht zeigen, dass der Ausdruck

Digitized by Google

$$\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}\,\frac{1}{x^{2m-1}}$$

für jedes endliche bestimmte x unendlich wird, sobald m in's Unendliche zunimmt und diess würde dann zu dem nichtssagenden Resultate führen, dass $l\Gamma(1+x) \pm \infty$ gleich einer Reihe wäre, welche von einer gewissen Stelle an divergirt. Gleichwohl aber sind die Formeln 10) und 12) höchst brauchbar, weil sie jederzeit Gränzen angeben, zwischen welchen der Werth von $l\Gamma(1+x)$ oder $\Gamma(1+x)$ zu suchen ist. Nach No. 10) hat man z. B.

$$l\Gamma(1+x) > \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x$$

$$l\Gamma(1+x) < \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{x}$$

$$l\Gamma(1+x) > \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{x^3}$$

$$l\Gamma(1+x) < \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (x+\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{B_1}{1.3}\,\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6}\,\frac{1}{x^5}$$

u. s. w.

Ist nun x eine nur einigermassen grosse Zahl, so nehmen die Glieder

$$13)\quad \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{x},\ \frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{x^3},\ \frac{B_5}{5.6}\,\frac{1}{x^5},\ \ldots.$$

offenbar eine Zeit lang ab, weil anfangs die Bernoulli'schen Zahlen fallen und erst später bedeutend zu steigen anfangen *); es werden also die Gränzen, zwischen welchen $l\Gamma(1+x)$ enthalten ist, sich anfangs einander nähern und erst von einer gewissen Stelle ab sich von einander entfernen. Für die praktische Berechnung ist es natürlich am vortheilhaftesten, dasjenige Paar von Ungleichungen zu wählen, deren rechte Seiten am wenigsten von einander verschieden sind, bei welchen

*) Die Bernoulli'schen Zahlen B_1, B_3, ... B_{25} sind nämlich

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},$$

$$\frac{3617}{510},\ \frac{43867}{798},\ \frac{174611}{330},\ \frac{854513}{138},\ \frac{236364091}{2730},$$

$$\frac{8553103}{6}.$$

Digitized by Google

also die Gränzen für $l\Gamma(1+x)$ einander am nächsten stehen. Diese Stelle lässt sich mit einiger Sicherheit *a priori* bestimmen; sie ist nämlich da, wo das allgemeine Glied der Reihe 13)

$$\frac{B_{2r+1}}{(2r+1)(2r+2)}\,\frac{1}{x^{2r+1}}$$

seinen kleinsten Werth erlangt und nur wenig von Null differirt. Da nun das vorhergehende Glied

$$\frac{B_{2r-1}}{(2r-1)(2r)}\,\frac{1}{x^{2r-1}}$$

nur wenig grösser sein soll, so muss die Differenz

$$\frac{B_{2r-1}}{(2r-1)(2r)}\,\frac{1}{x^{2r-1}} - \frac{B_{2r+1}}{(2r+1)(2r+2)}\,\frac{1}{x^{2r+1}}$$

beinahe gleich Null sein und daraus findet man näherungsweis

$$\frac{B_{2r+1}}{B_{2r-1}} = \frac{(2r+1)(2r+2)}{(2r-1)(2r)}\,x^2.$$

Andererseits hat die linke Seite den Werth

$$\frac{(2r+1)(2r+2)}{(2\pi)^2}\,\frac{S_{2r+2}}{S_{2r}}.$$

Nehmen wir den Quotienten $S_{2r+2} : S_{2r}$ beiläufig für 1, so giebt die Substitution in die vorige Gleichung $2r(2r-1) = (2\pi)^2 x^2$, d. i. näherungsweis $r = \pi x$. In dieser Gegend also findet man das kleinste Glied der Reihe 13). — Auch die Genauigkeit der Rechnung, d. h. die Grösse des Restes in No. 11. lässt sich schätzen, wenn man die Formel 12) auf ihn selbst anwendet. Da nämlich für unendlich wachsende x

$$Lim\; e^{\varphi(x,m)} = Lim\left[\frac{\Gamma(1+x)}{\sqrt{2\pi x}}\left(\frac{e}{x}\right)^x\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; Lim\left[\frac{\Gamma(x)e^x}{x^{x-\frac{1}{2}}}\right] = 1$$

ist, so folgt, dass für ein etwas grosses x die Exponenzialgrösse $e^{\varphi(x,m)}$ beiläufig $= 1$ gesetzt werden kann und dann hat man näherungsweis

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

oder für $x = 2m$

Digitized by Google

$$1.2.3 \ldots (2m) = 2\sqrt{m\pi}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}$$

und folglich vermöge der Relation zwischen B_{2m-1} und S_{2m}

$$B_{2m-1} = \frac{1.2.3 \ldots (2m)}{2^{2m-1}\pi^{2m}} S_{2m} = \frac{2\sqrt{m\pi}}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}$$

$$= \frac{4\sqrt{m\pi}}{e^{2m}}\left(\frac{m}{\pi}\right)^{2m}$$

wobei S_{2m} für 1 gerechnet worden ist. Substituiren wir diess in den absolutem Werth R' des Restes also in

$$R' = \frac{\varkappa B_{2m-1}}{(2m\text{-}1)(2m)} \frac{1}{x^{2m-1}}$$

so wird, $(2m\text{-}1)(2m)$ für $4m^2$ gerechnet,

$$R' = \varkappa \frac{\sqrt{m\pi}}{m^2 e^{2m}}\left(\frac{m}{\pi}\right)^{2m} \frac{1}{x^{2m-1}}.$$

Nehmen wir $m = r = \pi x$, gehen wir also bis zu der Stelle, wo das kleinste Glied den Schluss der Reihe macht, so wird

$$R' = \frac{1}{e^{2\pi x}\pi\sqrt{x}}$$

$$lR' = -2\pi x - l\pi - \tfrac{1}{2}\, lx$$

und hieraus lässt sich beurtheilen, auf wieviel Dezimalstellen ungefähr die Rechnung richtig sein wird, weil der Logarithmus von R' die Anzahl von Nullen kennen lehrt, welche hinter dem Komma zunächst stehen würden. So hätte man z. B. für $x = 5$, $r = 15$ oder 16, so dass also 15 bis 16 Glieder der Reihe 11) zu berechnen wären, ferner $lR' = -33,96$ also $log\, R' = -14,75$ (*bas* 10) und hieraus ersieht man, dass der Rest keinen Einfluss auf die 14te Dezimalstelle ausüben wird und man also nach Weglassung desselben immer noch 13 richtige Dezimalen übrig behält.

Um die so eben gemachten Bemerkungen möglichst zu veranschaulichen, geben wir ein vollständig ausgerechnetes Beispiel und zwar ein solches, bei welchem eine Controle möglich ist. Für $m = 3$ ist aus der Formel (12)

$$1.2.3 = \sqrt{6\pi}\left(\frac{3}{e}\right)^3 e^{\varphi(3,m)}$$

und daraus findet man *a priori*

$$\varphi(3, m) = (\tfrac{1}{2} \log 6 - \tfrac{1}{2} \log \pi + 3 \log e - 3) : \log e$$
$$= 0{,}02767\ 79256\ 86.$$

Benutzt man dagegen die Formel 11), so findet man der Reihe nach:

1tes	Glied:	. . . +	0,02777 77777 78
2 „	„	. . . —	0,00010 28806 58
			0,02767 48971 20
3 „	„	. . . +	32660 53
			0,02767 81631 73
4 „	„	. . . —	2721 71
			0,02767 78910 02
5 „	„	. . . +	427 65
			0,02767 79337 67
6 „	„	. . . —	108 24
			0,02767 79229 43
7 „	„	. . . +	40 21
			0,02767 79269 64
8 „	„	. . . —	20 59
			0,02767 79249 05
9 „	„	. . . +	13 91
			0,02767 79262 96
10 „	„	. . . —	11 98
			0,02767 79250 98
11 „	„	. . . +	12 81
			0,02767 79263 79

hier ist der Formel $r = \pi x$ gemäss das 10te Glied das kleinste und von diesem ab steigen die Glieder in's Unendliche hinein. Da nun der Rest immer einen aliquoten Theil des nächstfolgenden Gliedes beträgt, so wird derselbe am kleinsten, wenn wir bei 9 Gliedern stehen bleiben, so dass das nächstfolgende das 10te und kleinste ist. Wir haben daher für $m = 10$

Digitized by Google

$$\varphi(3,10) = \quad 0{,}02767\ 79262\ 96$$
$$- \varkappa(0{,}00000\ 00011\ 98)$$

oder es ist

$$\varphi(3,10) < 0{,}02767\ 79262\ 96$$

und $\varphi(3,10) > 0{,}02767\ 79250\ 98.$

Das arithmetische Mittel aus beiden Gränzen (d. h. der Werth $\varkappa = \frac{1}{2}$) giebt

$$\varphi(3,10) = 0{,}02767\ 79256\ 97$$

und diess stimmt mit dem vorhin unmittelbar gefundenen Werthe von φ auf 10 Dezimalstellen überein.

Wie gross die Hülfe ist, welche die Formel 10) zur Beurtheilung hoher Zahlen darbietet, möge noch die folgende kleine Rechnung zeigen. Es sei $x = 1000$, und um die natürlichen Logarithmen in künstliche zu verwandeln, multipliziren wir die ganze Gleichung mit dem Modulus der letzteren $M = 0{,}43429\ 44819$; es wird dann

$$x\,log\,x = \quad 3000{,}00000\ 00000\ 000$$
$$+\frac{1}{2}\,log\,x = \quad 1{,}50000\ 00000\ 000$$
$$+\frac{1}{2}\,log\,(2\pi) = \quad 0{,}39908\ 99341\ 790$$
$$-Mx = -\ 434{,}29448\ 19032\ 518$$
$$+\frac{MB_1}{1.2}\,\frac{1}{x} = +\ 0{,}00003\ 61912\ 068$$
$$-\frac{MB_3}{3.4}\,\frac{1}{x^3} = -\ 0{,}00000\ 00000\ 012$$
$$\overline{2567{,}60464\ 42221\ 328}$$

und da der Rest einen Bruchtheil des letzten Gliedes ausmacht, so liegt $log\ \Gamma(1+1000)$ zwischen

2567,60464 42221 328

und 2567,60464 42221 340.

hieraus folgt, dass $\Gamma(1+1000)$, d. h. 1.2.3 ... 1000 eine Zahl von 2568 Ziffern ausmacht und zwar sind ihre 10 ersten Ziffern: 40238 72600; demnach ist das Produkt 1.2 ... 1000 zwischen denjenigen zwei Zahlen enthalten, welche aus 40238 72600 und 40238 72601 durch Anhängen von 2558 Nullen hervorgehen. Eine solche Gränzbestimmung ist von vielem Werthe, weil man ausserdem kein Mittel besitzt um sich

Digitized by Google

von dem Endresultate einer so enormen Multiplikation wie 1.2.3 ... 1000 eine nur einigermassen richtige Vorstellung zu bilden.

Die Reihe 11) giebt ein sehr gutes Beispiel von einer sogenannten halbconvergenten Reihe, man begreift nämlich unter diesem Namen diejenigen Reihen, in welchen die Summe einer vom Anfange an gerechneten und zunehmenden Partie von Gliedern sich so lange einer bestimmten Gränze mehr und mehr nähert, als die Gliederanzahl eine gewisse Grösse (oben r) nicht überschreitet, nachher aber sich von jener Gränze wieder entfernt; es sind diess also Reihen, welche anfangs convergiren, von einer gewissen Stelle an aber divergent werden. Dieses Phänomen lässt sich leicht graphisch versinnlichen. Ist nämlich

$$F(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_n$$

und denkt man sich die Gleichung $y = F(n)$ dadurch geometrisch construirt, dass man n als Abscisse und y als Ordinate ansieht, so finden folgende Verhältnisse statt. Bei einer convergenten Reihe ist für unendlich wachsende n der Gränzwerth von $F(n)$ eine endliche Grösse, etwa S, nämlich die Summe der unendlichen Reihe $u_1 + u_2 +$ etc.; d. h. die durch die Gleichung $y = F(n)$ charakterisirte Curve nähert sich im weiteren Verlaufe mehr und mehr einer in der Entfernung S zur Abscissenachse parallel gelegten Geraden, und die letztere bildet demnach die Asymptote der krummen Linie; bei einer halbconvergenten Reihe dagegen nähert sich die Curve anfangs auch einer in gewisser Entfernung parallel zur Abscissenachse laufenden Geraden, diese Annäherung geht aber nicht unbegränzt fort, sondern nachdem die Curve an einer gewissen Stelle ($n = r$) der Geraden am nächsten gekommen ist, entfernt sie sich wieder mehr und mehr von derselben.

§. 15.

Näherungsformeln für Faktoriellen.

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten in mehrfachen Versuchen wird man bekanntlich sehr häufig zu Formeln geführt, deren numerische Ausführung sehr lange und unbequeme Rechnungen erfor-

Digitized by Google

dert, sobald eine in ihnen vorkommende Zahl (die Menge der angestellten Versuche) einigermassen beträchtlich ist; schon *Laplace* *) hat diesen Uebelstand bemerkt und ihm durch Näherungsformeln abzuhelfen gesucht, deren Beweis jedoch den jetzigen Anforderungen an strenge Begründung durchaus nicht mehr genügt. Nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln für $l\Gamma(1+x)$ und $\Gamma(1+x)$ hat es aber nicht die mindeste Schwierigkeit eine vollkommen gründliche Ableitung der *Laplace*'schen Ausdrücke zu geben, da es sich bei denselben immer nur um die Berechnung sogenannter Faktoriellen wie $\mu(\mu+1)(\mu+2)$ .... $(\mu+n-1)$ oder solcher Grössen handelt, welche aus diesen zusammengesetzt sind. Man hat nämlich nach einer bekannten Eigenschaft der Gammafunktionen

$$1)\quad \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2) \,....\, (a+n-1)\ ,\ a \text{ positiv},$$

und mithin

$$2)\quad l[a(a+1)(a+2) \,....\, (a+n-1)] = l\Gamma(a+n) - l\Gamma(a)$$

wo sich nun die rechts stehenden Logarithmen mittelst Formel 9) des vorigen Paragraphen leicht um so genauer berechnen lassen, je grösser a ist.

Ebenso leicht kann man eine Formel zur näherungsweisen Berechnung eines beliebigen Binomialkoeffizienten

$$\mu_s = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2) \,....\, (\mu-s+1)}{1.2.3 \,....\, s}$$

aufstellen. Für $a=\mu-s+1$ und $n=s$ giebt nämlich die Formel 1) vorausgesetzt, dass $\mu+1>s$ ist

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} = (\mu-s+1)(\mu-s+2) \,....\, (\mu-1)\mu$$

und durch Division mit $\Gamma(s+1) = 1.2.3 \,....\, s$,

$$3)\quad \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)\Gamma(s+1)} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2) \,...\, (\mu-s+1)}{1.2.3 \,...\, s} = \mu_s$$

mithin

$$l(\mu_s) = l\Gamma(\mu+1) - l\Gamma(\mu-s+1) - l\Gamma(s+1).$$

*) Théorie analytique des probabilités, Livre I., seconde partie, Chap III.

Digitized by Google

Sämmtliche Logarithmen der rechten Seite sind nach Formel 10) des vorigen Paragraphen leicht zu entwickeln; setzt man zur Abkürzung

$$4)\quad t_{2n-1} = \frac{1}{\mu^{2n-1}} - \frac{1}{(\mu-s)^{2n-1}} - \frac{1}{s^{2n-1}}$$

so hat man nämlich

$$l(\mu_s) = -\tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu+\tfrac{1}{2})\,l\mu - (\mu-s+\tfrac{1}{2})\,l(\mu-s) - (s+\tfrac{1}{2})ls$$
$$+ \frac{B_1}{1.2}t_1 - \frac{B_3}{3.4}t_3 + \frac{B_5}{5.6}t_5 - \dots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}t_{2m-3}$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}t_{2m-1}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung wie folgt

$$5)\quad T = \frac{B_1}{1.2}t_1 - \frac{B_3}{3.4}t_3 + \dots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}t_{2m-3}$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1}\varkappa B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}t_{2m-1}$$

so geht die vorige Gleichung in die nachstehende über

$$l(\mu_s) = \tfrac{1}{2}\,l\left[\frac{\mu}{2\pi s(\mu-s)}\right] + l\left[\frac{\mu^\mu}{s^s(\mu-s)^{\mu-s}}\right] + T$$

und daraus findet man sogleich die wichtige Formel

$$6)\quad \mu_s = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi s(\mu-s)}}\cdot\frac{\mu^\mu}{s^s(\mu-s)^{\mu-s}}\,e^T.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist noch der Fall von Interesse, wo μ eine ganze Zahl bedeutet und das Doppelte von s ausmacht, so dass $(2s)_s$ den mittelsten Binomialkoeffizienten des Exponenten $2s$ ausmacht. Für diese Spezialisirung geben die Formeln 4), 5) und 6)

$$7)\quad t_{2n-1} = -\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}\,\frac{1}{s^{2n-1}}$$

$$8)\quad T = -\frac{2^2-1}{2}\,\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{s} + \frac{2^4-1}{2^3}\,\frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{s^3} - \frac{2^6-1}{2^5}\,\frac{B_5}{5.6}\,\frac{1}{s^5} + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{m-1}(2^{2m-2}-1)}{2^{2m-3}}\,\frac{B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)}\,\frac{1}{s^{2m-3}}$$
$$+ \frac{(-1)^m\varkappa(2^{2m}-1)}{2^{2m-1}}\,\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)}\,\frac{1}{s^{2m-1}}$$

endlich

$$9)\quad (2s)_s = \frac{2^{2s}}{\sqrt{\pi s}}\,e^T.$$

Digitized by Google

Eine weitere Forderung, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung macht, betrifft die Angabe des grössten Gliedes in der Reihe, welche die Entwickelung von

$$(p+q)^{r(p+q)}$$

nach dem Binomialtheoreme für ganze positive p, q und r giebt. Man weiss, dass dieses Glied das $(pr+1)^{\text{te}}$ ist, nämlich

$$(pr+qr)_{qr}p^{pr}q^{qr}$$

und hat nun nach No. 4), 5) und 6) für $\mu = pr + qr$, $s = qr$,

$$10) \quad t_{2n-1} = \left\{\frac{1}{(p+q)^{2n-1}} - \frac{1}{p^{2n-1}} - \frac{1}{q^{2n-1}}\right\} \frac{1}{r^{2n-1}},$$

$$T = \frac{B_1}{1.2} t_1 - \frac{B_3}{3.4} t_3 + \dots + \frac{(-1)^m B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)} t_{2m-3}$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1} x B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)} t_{2m-1}$$

und

$$(pr+qr)_{qr} = \sqrt{\frac{p+q}{2\pi pqr}} \cdot \frac{(p+q)^{(p+q)r}}{p^{pr}q^{qr}} e^T$$

woraus man leicht

$$11) \quad \frac{(pr+qr)_{qr}p^{pr}q^{qr}}{(p+q)^{(p+q)r}} = \sqrt{\frac{p+q}{2\pi pqr}} e^T$$

d. h. das Verhältniss des grössten Gliedes der Entwickelung zur ganzen Entwickelung herleitet.

Digitized by Google

Zweiter Theil.

Summenrechnung.

Digitized by Google

Digitized by Google

§. 1.

Begriff und Bezeichnungsweise der Summenrechnung.

Die Summenrechnung ist das Entgegengesetzte der Differenzenrechnung, wesshalb sie auch öfters die umgekehrte Differenzenrechnung genannt wird. Während es nämlich das Geschäft der Differenzenrechnung war, aus der Natur einer Funktion den Betrag ihrer Aenderung (Differenz) abzuleiten, liegt es umgekehrt der Summenrechnung ob, aus einer gegebenen Differenz auf diejenige Funktion zurückzuschliessen, welche sich um eben diese Differenz ändern würde. Fragte man z. B. nach derjenigen unbekannten Funktion $f(x)$, deren Differenz $= (e^h-1)e^x$ wäre, so hätte man diese Funktion aus der Gleichung

$$\Delta f(x) = (e^h-1)e^x$$

zu bestimmen; man wird gleich errathen, dass hier $f(x) = e^x$ sein muss, aber da ein solches Errathen nur in wenigen Fällen glücken und diess ohnehin kein wissenschaftliches Verfahren sein würde, so bedarf es gewisser Regeln, nach denen man Gleichungen wie die obige auflöst. Die Entwickelung dieser Regeln bildet das Hauptgeschäft der Summenrechnung.

Findet nun überhaupt zwischen einer unbekannten Funktion $f(x)$ und einer gegebenen $\varphi(x)$ die Gleichung

1) $$\Delta f(x) = \varphi(x)$$

statt, so würde die Auflösung derselben offenbar zur Kenntniss von $f(x)$ führen, und um diess durch ein Zeichen ausdrücken zu können, bedienen wir uns des Buchstabens Σ in der Weise, dass $\Sigma\varphi(x)$ diejenige unbekannte Funktion von x bedeuten soll, deren Differenz $= \varphi(x)$ ist. Aus der Gleichung 1) folgt dann

2) $$f(x) = \Sigma\varphi(x).$$

Digitized by Google

Die Zeichen Δ und Σ bedeuten also sich gegenseitig aufhebende Operationen, denn sowie man für $\varphi(x)$ in der zweiten Gleichung seinen Werth $\Delta f(x)$ aus 1) substituirt, so wird

$$f(x) = \Sigma\Delta f(x)$$

womit sich das eben Gesagte bestätigt.

Der Grund der Benennung Summenrechnung (wofür Manche auch den Ausdruck endliche Integralrechnung brauchen) liegt darin, dass $\Sigma\varphi(x)$ in der That eine Summe von einer Partie Funktionen bedeuten kann. Denn setzt man in der Gleichung $\Delta f(x) = \varphi(x)$ oder

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x)$$

für x der Reihe nach die Grössen a, $a+h$, $a+2h$, ... $a+(m-1)h$, wo m eine ganze positive Zahl bezeichnet, und addirt hierauf alle so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \varphi(a) \\ f(a+2h) - f(a+h) &= \varphi(a+h) \\ f(a+3h) - f(a+2h) &= \varphi(a+2h) \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ f(a+mh) - f(a+\overline{m-1}h) &= \varphi(a+\overline{m-1}h) \end{aligned}$$

so ergiebt sich auf der Stelle

3) $f(a+mh)-f(a)=\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots+\varphi(a+\overline{m-1}h)$

oder für $a+mh = x$,

$$f(x) = \varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(x-h) \\ + f(a).$$

Es ist also $f(x)$ eine Summe und zwar von den verschiedenen Werthen, welche $\varphi(z)$ erhält, wenn man z der Reihe nach $= a$, $a+h$, $a+2h$, ... $x-h$ setzt. Da der Anfang dieser Reihe, nämlich die Grösse a, willkührlich bleibt und a nicht von x abhängt, so spielt die letzte Funktion $f(a)$ die Rolle einer willkührlichen Constanten. Dass man in der That befugt sei zu einer gefundenen Summe $f(x)$ noch eine arbiträre Constante hinzuzusetzen, erhellt auch leicht unmittelbar aus dem Begriffe von $\Sigma\varphi(x)$. Wenn z. B. $f(x)$ aus der Gleichung $\Delta f(x) = e^x(e^h-1)$ bestimmt werden soll, so ist es ebenso richtig $f(x) = e^x$ als $= e^x + C$ zu setzen, wo C eine beliebige von x unabhängige Grösse bezeichnet; denn e^x sowohl als $e^x + C$ genügen der auf-

Digitized by Google

gestellten Differenzengleichung. Versteht man überhaupt unter $\Sigma\varphi(x)$ diejenige keine willkührliche Grösse enthaltende Funktion von x, welche für $f(x)$ substituirt, die Gleichung $\Delta f(x) = \varphi(x)$ erfüllt, so folgt aus der Gleichung

4) $\Delta f(x) = \varphi(x)$

allgemeiner als vorhin die Formel

5) $f(x) = \Sigma\varphi(x) + C.$

Man kann aber noch weiter gehen. Die Befugniss nämlich, eine arbiträre Constante hinzuzusetzen, beruht auf dem Umstande, dass C seinen Werth nicht ändert, wenn man x um h zunehmen lässt, und folglich bei der Subtraktion von $f(x)$ und $f(x+h)$ wieder verschwindet. Diese Eigenschaft kommt aber nicht nur den constanten Grössen, sondern auch gewissen Funktionen und zwar periodischen Funktionen zu; so ist z. B.

$$\cos\left[\frac{2\pi}{h}(x+h)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{h}x\right]$$

und mithin ändert sich die Funktion $\cos\frac{2\pi x}{h}$ nicht, wenn man $x+h$ an die Stelle von x treten lässt; es würde daher in dem schon angeführten Beispiele $\Delta f(x) = e^x(e^h\text{-}1)$ auch erlaubt sein, $f(x) = e^x + \cos\frac{2\pi x}{h}$ zu setzen. Berücksichtigt man endlich, dass überhaupt die Funktion $\psi\left(\cos\frac{2\pi x}{h},\ \sin\frac{2\pi x}{h}\right)$ dieselbe bleibt, wenn man $x+h$ für x substituirt, so erhellt, dass man aus einer Gleichung wie $\Delta f(x) = \varphi(x)$ auch schliessen darf

6) $f(x) = \Sigma\varphi(x) + \psi\left(\cos\frac{2\pi x}{h},\ \sin\frac{2\pi x}{h}\right).$

Von welcher Grösse nun C, oder von welcher Form die Funktion ψ sei, lässt sich in jedem einzelnen Falle ausmitteln, wo die Summenrechnung zur Auflösung einer vollkommen bestimmten Aufgabe benutzt wird; natürlich aber hängt diese Entscheidung von der jedesmaligen Individualität einer solchen Aufgabe ab und steht desshalb unter keiner festen Regel.

Digitized by Google

§. 2.

Summen der einfachsten Funktionen.

Nach der so eben aufgestellten Definition von $\Sigma\varphi(x)$ hat es keine Schwierigkeit eine kleine Tabelle zu entwerfen, welche für mehrere der wichtigsten Spezialisirungen von $\varphi(x)$ die zugehörigen endlichen Integrale $\Sigma\varphi(x)$ angiebt. Es ist hierzu weiter nichts als eine leichte Umwandlung der gewöhnlichsten Differenzenformeln nöthig. So haben wir z. B.

$$\Delta[x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-nh)]$$
$$= (x+h)x(x-h)\;....\;(x-\overline{n-1}h) - x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-nh)$$
$$= (n+1)h\,.\,x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-\overline{n-1}h).$$

Bei umgekehrter Ordnung kann man dafür auch schreiben

$$x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-\overline{n-1}h) = \Delta\,\frac{x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-nh)}{(n+1)h}$$

und daraus folgt nach der Regel, dass eine Gleichung wie $\varphi(x) = \Delta f(x)$ die zweite $\Sigma\varphi(x) = f(x)$ nach sich zieht,

$$1)\quad \Sigma[x(x-h)(x-2h)\;...\;(x-\overline{n-1}h)] = \frac{x(x-h)(x-2h)\;....\;(x-nh)}{(n+1)h}$$

wobei man rechts noch eine willkührliche Constante hinzufügen darf.

Setzt man $x = x' + (n-1)h$, so erhält man sogleich

$$\Sigma[(x'+\overline{n-1}h)(x'+\overline{n-2}h)\;...\;x'] = \frac{(x'+\overline{n-1}h)(x'+\overline{n-2}h)\;....\;(x'-h)}{(n+1)h}$$

oder wenn man die Faktorenfolgen beiderseits in umgekehrter Ordnung schreibt und die Accente weglässt

$$2)\quad \Sigma[x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{n-1}h)] = \frac{(x-h)x(x+h)\;....\;(x+\overline{n-1}h)}{(n+1)h}$$

wie man auch dadurch findet, dass man von der Differenzengleichung

$$x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{n-1}h) = \Delta\,\frac{(x-h)x(x+h)\;....\;(x+\overline{n-1}h)}{(n+1)h}$$

ausgeht.

Man hat ferner die folgende Gleichung

$$\Delta\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{m-1}h)}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\;....\;(x+mh)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{m-1}h)}$$

$$= -\frac{mh}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+mh)}$$

wofür man umgekehrt auch schreiben kann

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+mh)}$$

$$= \Delta\left[-\frac{1}{mh}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{m-1}h)}\right].$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle die Summenformel

$$\Sigma\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h\;....\;(x+mh)}$$

$$= -\frac{1}{mh}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{m-1}h)}$$

oder wenn man $n-1$ an die Stelle von m treten lässt

$$3)\qquad \Sigma\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{n-1}h)}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)h}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\;....\;(x+\overline{n-2}h)}.$$

Man darf übrigens diese Formel nicht für $n=1$, d. h. $m=0$ in Anspruch nehmen wollen. Denn der Ausdruck

$$\frac{1}{x(x+h)\;....\;(x+\overline{m-1}h)}$$

von dessen Differenz wir ausgingen, enthält im Nenner m Faktoren, und darin liegt schon von selbst die Bedingung, dass m nicht $=0$ sein darf.

An diese endlichen Integrationen algebraischer Funktionen lassen sich noch die folgenden auf transscendente Funktionen bezügliche anreihen. Es ist $\Delta a^x = (a^h-1)a^x$ oder umgekehrt geschrieben

$$a^x = \frac{\Delta a^x}{a^h-1} = \Delta\,\frac{a^x}{a^h-1}$$

mithin

$$4)\qquad \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h-1}.$$

Digitized by Google

Mittelst der Formel für $\Delta \cos x$ überzeugt man sich ferner leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\sin\,(x+\tfrac{1}{2}h) = -\frac{\Delta \cos x}{2\sin\tfrac{1}{2}h}$$

oder $x-\tfrac{1}{2}h$ für x geschrieben

$$\sin x = -\frac{\Delta \cos(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h} = \Delta\left[-\frac{\cos(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h}\right]$$

woraus die Summenformel erhalten wird

$$5)\qquad \Sigma \sin x = -\frac{\cos(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h}.$$

Ferner ist vermöge des Werthes von $\Delta \sin x$

$$\cos\,(x+\tfrac{1}{2}h) = \frac{\Delta \sin x}{2\sin\tfrac{1}{2}h}$$

oder wenn man $x-\tfrac{1}{2}h$ für x substituirt

$$\cos x = \frac{\Delta \sin(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h} = \Delta\frac{\sin(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h}$$

hieraus fliesst die Summenformel

$$6)\qquad \Sigma \cos x = \frac{\sin(x-\tfrac{1}{2}h)}{2\sin\tfrac{1}{2}h}.$$

Um nun auch die endlichen Integrationen zusammengesetzterer Funktionen ausführen zu können, bedürfen wir einiger allgemeiner Regeln, nach welchen das endliche Integral einer zusammengesetzten Funktion aus den Integralen ihrer einzelnen Bestandtheile gebildet wird.

§. 3.

Allgemeine Regeln für die endliche Integration zusammengesetzterer Funktionen.

I. Wenn U, V, W etc. verschiedene Funktionen von x sind und

$$\Delta U = u,\ \Delta V = v,\ \Delta W = w,\ \ldots.$$

gesetzt wird, so folgt

$$\Delta U \pm \Delta V \pm \Delta W \pm \ldots = u \pm v \pm w \pm \ldots.$$

d. i.

$$\Delta(U \pm V \pm W \pm \ldots.) = u \pm v \pm w \pm \ldots.$$

Dem Begriffe des endlichen Integrales nach ergiebt sich hieraus

Digitized by Google

$$U + V \pm W \pm \dots = \Sigma(u \pm v \pm w \pm \dots)$$

Andererseits ist aber wegen $\Delta U = u$ umgekehrt $U = \Sigma u$, ebenso $V = \Sigma v$ etc., folglich durch Addition resp. Subtraktion dieser Gleichungen

$$U \pm V \pm W \pm \dots = \Sigma u \pm \Sigma v \pm \Sigma w \pm \dots$$

und durch Vergleichung dieses Resultates mit dem vorhergehenden entsteht die leicht in Worte übersetzbare Regel

1) $\Sigma(u \pm v \pm w \pm \dots) = \Sigma u \pm \Sigma v \pm \Sigma w \pm \dots$

II. Ist k ein von x unabhängiger, also constanter Faktor, so gilt bei derselben Bezeichnung wie vorhin die Formel

$$\Delta(kU) = k\Delta U = ku$$

folglich umgekehrt

$$kU = \Sigma(ku).$$

Andererseits ist aber wie oben $U = \Sigma u$, mithin, wenn man diess substituirt und die beiden Seiten der vorigen Gleichung gegen einander vertauscht,

2) $\Sigma(ku) = k\Sigma u.$

III. Um auch eine ähnliche Formel für das Produkt zweier abhängig variabler Grössen d. h. für $\Sigma(uv)$ zu finden, verfahren wir folgendermassen. Es sei

$$\Sigma(uv) = u\Sigma v + z$$

wo z eine noch unbekannte Funktion von x ist. Nimmt man unter Rücksicht auf die Formel

$$\Delta(pq) = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p . \Delta q$$

von der obigen Gleichung die Differenz, so wird

$$uv = u\Delta\Sigma v + \Delta u . \Sigma v + \Delta u . \Delta\Sigma v + \Delta z$$

$$= uv + \Delta u . \Sigma v + \Delta u . v + \Delta z$$

d. i. wenn man Δz auf eine Seite allein bringt

$$\Delta z = - \Delta u(v + \Sigma v)$$

mithin

$$z = - \Sigma[\Delta u(v + \Sigma v)]$$

womit z seine Bestimmung gefunden hat. Nach dem Früheren ist nun

3) $\Sigma(uv) = u\Sigma v - \Sigma[\Delta u(v + \Sigma v)].$

Digitized by Google

Für den ersten Augenblick könnte man glauben, dass diese Formel die Schwierigkeiten der angedeuteten Summation von uv eher vermehre als vermindere, weil sie die ursprüngliche einfache Integration auf zwei andere nach einander auszuführende Integrationen reduzirt. Gleichwohl zeigen spezielle Fälle, dass im Gegentheile es oft leichter ist, durch eine solche Theilung der Arbeit, wie sie die Formel 3) vorschreibt, als durch Integration auf einmal zum Ziele zu kommen. So hat man z. B. für $u = x$, $v = e^x$

$$\Delta u = h, \; \Sigma v = \frac{e^x}{e^h-1}$$

und nun nach No. 3)

$$\Sigma(xe^x) = x\frac{e^x}{e^h-1} - \Sigma\left[h\left(e^x + \frac{e^x}{e^h-1}\right)\right]$$

$$= \frac{xe^x}{e^h-1} - \Sigma\left[\frac{he^h}{e^h-1}e^x\right]$$

d. i. unter Anwendung der Formel 2)

$$\Sigma(xe^x) = \frac{xe^x}{e^h-1} - \frac{he^h}{e^h-1}\Sigma e^x$$

oder vermöge des bekannten Werthes von Σe^x

$$\Sigma(xe^x) = \frac{xe^x}{e^h-1} - \frac{he^he^x}{(e^h-1)^2},$$

was man rückwärts leicht verifiziren kann, da nun umgekehrt

$$\Delta\left[\frac{xe^x}{e^h-1} - \frac{he^he^x}{(e^h-1)}\right] = xe^x$$

sein muss. — Die in No. 3) entwickelte Regel für die endliche Integration eines Produktes umfasst auch den Fall der Integration eines Quotienten, denn setzt man z. B. in $\frac{u}{w}$ den Ausdruck $\frac{1}{w} = v$, so erscheint der Quotient $\frac{u}{w}$ unter der Form eines Produktes uv.

Nachdem wir uns nun in den Besitz allgemeiner Regeln gesetzt haben, welche die Integration complizirterer Funktionen offenbar sehr erleichtern, wollen wir uns nun mit der Integration der verschiedenen Klassen solcher Funktionen näher beschäftigen.

Digitized by Google

§. 4.

Endliche Integration der rationalen ganzen algebraischen Funktionen.

Bezeichnen wir mit $A, B, C, \ldots M$ constante Grössen, mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ beliebige positive ganze Zahlen, so stellt der Ausdruck

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Mx^\mu$$

das allgemeine Schema aller rationalen ganzen algebraischen Funktionen dar. Aus der Bemerkung

$$\Sigma(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Mx^\mu)$$
$$= \Sigma(Ax^\alpha) + \Sigma(Bx^\beta) + \Sigma(Cx^\gamma) + \ldots + \Sigma(Mx^\mu)$$
$$= A\Sigma x^\alpha + B\Sigma x^\beta + C\Sigma x^\gamma + \ldots + M\Sigma x^\mu$$

geht nun sogleich hervor, dass es nur darauf ankommt, eine Potenz mit beliebigem ganzen positiven Exponenten zu summiren, oder überhaupt Σx^m zu bestimmen. Diess hat keine Schwierigkeiten, wenn man sich an die bekannte Formel der Differenzenrechnung

$$\Delta(x^{m+1}) = \frac{m+1}{1} x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1}h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2}h^3$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} x^{m-3}h^4 \pm \ldots + h^{m+1}$$

erinnert, welche in der compendiöseren Form

$$\Delta(x^{m+1}) = (m+1)_1 x^m h + (m+1)_2 x^{m-1}h^2 + (m+1)_3 x^{m-2}h^3 + \ldots$$
$$\ldots + (m+1)_m x h^m + (m+1)_{m+1} h^{m+1}$$

dargestellt werden kann. Beiderseitige endliche Integration giebt hier

$$x^{m+1} = (m+1)_1 h\Sigma x^m + (m+1)_2 h^2\Sigma x^{m-1} + (m+1)_3 \Sigma x^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (m+1)_m h^m \Sigma x + (m+1)_{m+1} h^{m+1}\Sigma x^0$$

und durch Transposition von Σx^m auf eine Seite allein erhält man daraus

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)_1 h} - \frac{(m+1)_2}{(m+1)_1} h\Sigma x^{m-1} - \frac{(m+1)_3}{(m+1)_1} h^2\Sigma x^{m-2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{(m+1)_m}{(m+1)_1} h^{m-1}\Sigma x - \frac{(m+1)_{m+1}}{(m+1)_1} h^m \Sigma x^0$$

was sich noch etwas kürzer ausdrücken lässt, wenn man sich erinnert, dass überhaupt für ein ganzes positives k

Digitized by Google

$$\frac{(m+1)_k}{(m+1)_1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+2)}{1.2.3\dots k}$$

$$= \frac{1}{k}\,\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k-1+1)}{1.2.3\dots(k-1)} = \frac{1}{k}m_{k-1}$$

ist. Die obige Gleichung geht dann in die folgende über

$$1)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h}$$

$$-\,[\tfrac{1}{2}m_1 h\Sigma x^{m-1} + \tfrac{1}{3}m_2 h^2\Sigma x^{m-2} + \dots + \frac{1}{m}m_{m-1}h^{m-1}\Sigma x$$

$$+\frac{1}{m+1}m_m h^m \Sigma x^0]$$

und dient als sogenannte Reduktionsformel, weil durch sie die Aufgabe der Integration von x^m auf die Integrationen von x^{m-1}, x^{m-2}, ... x^1, x^0 zurückgeführt wird. Setzt man der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \dots$ so erhält man

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2h} - \tfrac{1}{2}h\Sigma x^0$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3h} - \tfrac{1}{2}.2_1 h\Sigma x^1 - \tfrac{1}{3}.2_2 h^2\Sigma x^0$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \tfrac{1}{2}.3_1 h\Sigma x^2 - \tfrac{1}{3}.3_1 h^2\Sigma x^1 - \tfrac{1}{4}.3_3 h^3\Sigma x^0$$

und hieraus ersieht man, dass sich successiv Σx^1, Σx^2, Σx^3 etc. bestimmen lassen würden, wenn vorerst $\Sigma x^0 = \Sigma 1$ bekannt wäre. Nun ist aber

$$\Delta\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{x+h}{h} - \frac{x}{h} = 1$$

$$\text{mithin}\quad \frac{x}{h} = \Sigma 1 = \Sigma x^0$$

und nachdem wir so zur Kenntniss von Σx^0 gelangt sind, geben die vorhergehenden Formeln der Reihe nach

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}xh$$

Digitized by Google

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2h$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5.6}xh^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4h - \frac{1}{2.6}x^2h^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}\,\frac{x^7}{h} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5h - \frac{1}{6}x^3h^3 + \frac{1}{6.7}xh^5$$

$$\Sigma x^7 = \frac{1}{8}\,\frac{x^8}{h} - \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{2.6}x^6h - \frac{7}{2.3.4}x^4h^3 + \frac{1}{2.6}x^2h^5$$

u. s. f.

Um das Gesetz zu übersehen, nach welchem sich diese Ausdrücke bilden, sind folgende Bemerkungen nöthig. Achtet man zunächst auf die Potenzen von x und h, die in den obigen Gleichungen der Reihe nach vorkommen, so scheint folgendes Gesetz obzuwalten

$$\Sigma x^m = \frac{1}{m+1}\,\frac{x^{m+1}}{h} - \frac{1}{2}x^m + A_1x^{m-1}h - A_3x^{m-3}h^3 + A_5x^{m-5}h^5 - \ldots.$$

worin A_1, A_3, A_5, ... gewisse noch unbekannte Coefficienten sind. Für die Bestimmung dieser letzteren ist die Bemerkung von Gewicht, dass man z. B. schreiben kann:

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{2}x^3h - \frac{1}{30}\cdot\frac{4.3.2}{2.3.4}xh^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2}x^4h - \frac{1}{30}\cdot\frac{5.4.3}{2.3.4}x^2h^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}\,\frac{x^7}{h} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{2}x^5h - \frac{1}{30}\cdot\frac{6.5.4}{2.3.4}x^3h^3 + \frac{1}{42}\cdot\frac{6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}xh^5$$

$$\Sigma x^7 = \frac{1}{8}\,\frac{x^8}{h} - \frac{1}{2}x^7 + \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{2}x^6h - \frac{1}{30}\cdot\frac{7.6.5}{2.3.4}x^4h^3 + \frac{1}{42}\cdot\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5.6}x^2h^5$$

u. s. f.

woraus hervorzugehen scheint, dass

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{6}\,\frac{m}{2}x^{m-1}h - \frac{1}{30}\,\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}x^{m-3}h^3$$
$$+ \frac{1}{42}\,\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6}x^{m-5}h^5 - \ldots.$$

wäre. Die Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, ... sind aber die ersten Bernoulli'schen Zahlen und so kämen wir rein induktorisch zu der Formel

Digitized by Google

$$2)\quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m$$
$$+ \tfrac{1}{2}m_1 B_1 x^{m-1}h - \tfrac{1}{4}m_3 B_3 x^{m-3}h^3 + \tfrac{1}{6}m_5 B_5 x^{m-5}h^5 - \ldots.$$

worin zur Abkürzung von den Binomialkoeffizienten Gebrauch gemacht worden ist. Dass die so gewonnene Gleichung in der That allgemein für jedes ganze positive m gilt, wird sich später zeigen, wo wir dieselbe als Spezialisirung einer weit allgemeinen Formel wieder finden werden.

Es giebt übrigens noch eine zweite Form, unter welcher sich Σx^m darstellen lässt. Da man nämlich jeden Ausdruck von der Form

$$x(x-h)(x-2h) \ldots. (x-\overline{n-1}h)$$

integriren kann, so würde sich auch die Integration von x^m bewerkstelligen lassen, sobald man eine Gleichung von der Form

$$4)\quad x^m = H_1 x + H_2 x(x-h) + H_3 x(x-h)(x-2h) + \ldots.$$
$$\ldots. + H_m x(x-h)(x-2h) \ldots. (x-\overline{m-1}h)$$

aufstellen könnte, worin H_1, H_2, ... H_m constante Coefficienten bedeuteten. Denn man hätte nachher

$$\Sigma x^m = H_1 \Sigma x + H_2 \Sigma[x(x-h)] + H_3 \Sigma[x(x-h)(x-2h)] + \ldots.$$
$$\ldots. + H_m \Sigma[x(x-h)(x-2h) \ldots. (x-\overline{m-1}h)]$$

und hier lassen sich in der That sämmtliche auf der rechten Seite vorkommende Summen mit Hülfe von Formel 1) in §. 2. entwickeln. — Um nun auszumitteln, ob eine Gleichung von der Form 4) möglich ist und welche Werthe von H_1, H_2, ... H_m dazu gehören würden, betrachten wir erst die einfachere Gleichung

$$5)\quad z^m = J_1 z + J_2 z(z-1) + J_3 z(z-1)(z-2) + \ldots.$$
$$\ldots. + J_m z(z-1)(z-2) \ldots. (z-\overline{m-1}).$$

Ihre Möglichkeit ist leicht einzusehen, denn denkt man sich die Multiplikationen auf der rechten Seite ausgeführt, so wird

$$z^m = J_1 z + J_2(z^2-z) + J_3(z^3-3z^2+2z) + \ldots.$$
$$\ldots. + J_m(z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \ldots. \pm \mu z)$$

wo α, β, ... μ gewisse rein numerische und bekannte Coeffizienten bedeuten. Setzt man die Coeffizienten von x, x^2, ... x^{m-1} gleich Null und den von x^m gleich 1, so findet Identität statt und zur Bestimmung von J_1, J_2, ... J_m ergeben sich die Gleichungen

Digitized by Google

$$J_1 - J_2 + 2J_3 - \dots = 0$$
$$J_2 - 3J_3 + \dots\dots = 0$$
u. s. f.

bis zuletzt die Gleichung $J_m = 1$ erscheint. Diess sind aber m Gleichungen ersten Grades zwischen den m Unbekannten $J_1, J_2, \dots J_m$, und daher ist die Bestimmung der letzteren jederzeit möglich. Um aber auf einem kürzeren Wege zu derselben zu gelangen, nehmen wir in 5) der Reihe nach $z = 1, 2, 3, \dots k, \dots m$ und erhalten so

$$1^m = J_1$$
$$2^m = J_1 . 2 + J_2 . 2 . 1$$
$$3^m = J_1 . 3 + J_2 . 3 . 2 + J_3 . 3 . 2 . 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$k^m = J_1 k + J_2 k(k-1) + J_3 k(k-1)(k-2) + \dots + J_k k(k-1) \dots 2 . 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m^m = J_1 m + J_2 m(m-1) + J_3 m(m-1)(m-2) + \dots + J_m m(m-1) \dots 2 . 1$$

Um aus diesen m Gleichungen irgend eine unserer Unbekannten etwa J_k zu bestimmen, multipliziren wir die erste Gleichung mit $\frac{k}{1} = k_1$, die zweite mit $\frac{k(k-1)}{1.2} = k_2$, die dritte mit k_3, ... die k^{te} mit k_k und nehmen darauf Alles mit wechselnden Zeichen zusammen; es wird so

$$1^m k_1 - 2^m k_2 + 3^m k_3 - \dots + (-1)^{k-1} k^m k_k$$
$$= J_1(k_1 - 2k_2 + 3k_3 - \dots \pm k . k_k)$$
$$- J_2(1.2k_2 - 2.3k_3 + 3.4k_4 - \dots \pm (k-1)k . k_k)$$
$$+ J_3(1.2.3k_3 - 2.3.4k_4 + \dots \pm (k-2)(k-1)k . k_k)$$
$$- \dots\dots\dots\dots$$
$$+ (-1)^{k-1} k(k-1) \dots 2.1 . k_k J_k .$$

Die auf der rechten Seite in Parenthesen eingeschlossenen Reihen stehen sämmtlich unter der gemeinschaftlichen Form

$$1.2 \dots s . k_s - 2.3 \dots (s+1) k_{s+1} + 3.4 \dots (s+2) k_{s+2} - \dots$$

und zwar wäre diess der Coeffizient von J_s. Berücksichtigt man die Gleichungen

$$k_{s+1} = \frac{k-s}{s+1} k_s \ , \ k_{s+2} = \frac{(k-s)(k-s-1)}{(s+1)(s+2)} k_s, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

so lässt sich jener Coeffizient auch in folgende Gestalt bringen:

$$k_s[1.2\ldots s - 2.3\ldots s.(k-s) + 3.4\ldots 5.(k-s)(k-s-1) - \ldots]$$

$$= 1.2.3\ldots s.k_s[1 - \frac{k-s}{1} + \frac{(k-s)(k-s-1)}{1.2} - \ldots]$$

$$= 1.2.3\ldots s.k_s[1 - (k-s)_1 + (k-s)_2 - (k-s)_3 - \ldots]$$

Die Summe der mit wechselnden Zeichen zusammengenommenen Binomialkoeffizienten ist aber bekanntlich $= 0$, so lange der Exponent (hier $k - s$) selbst von Null verschieden (also $s < k$) bleibt; für jedes $s < k$ verschwindet daher der Coeffizient von J_s und mithin bleibt in der vorhin erhaltenen Gleichung nur J_k übrig; nämlich

$$1^m k_1 - 2^m k_2 + 3^m k_3 - \ldots + (-1)^{k-1} k^m k_k$$
$$= (-1)^{k-1} 1.2\ldots k.k_k J_k.$$

Ordnet man die Reihe links umgekehrt an und berücksichtigt dabei, dass $k_k = 1$, $k_{k-1} = k_1$, $k_{k-2} = k_2$ etc. ist, so findet man jetzt

$$6)\quad J_k = \frac{1}{1.2\ldots k}[k^m - k_1(k-1)^m + k_2(k-2)^m - \ldots]$$

wobei die eingeklammerte Reihe soweit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Nachdem wir so das Bildungsgesetz der Coeffizienten J_1, J_2, ... J_m in der Gleichung 5) bestimmt haben, setzen wir daselbst $z = \frac{x}{h}$ und erhalten jetzt durch Multiplikation mit h^m

$$x^m = J_1 h^{m-1} x + J_2 h^{m-2} x(x-h) + J_3 h^{m-3} x(x-h)(x-2h) + \ldots$$
$$\ldots + J_m h^0 x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{m-1}h).$$

Beiderseitige endliche Integration giebt jetzt unter Benutzung der Formel 1) in §. 2. für $n = 1, 2, 3, \ldots m$,

$$7)\quad \Sigma x^m = \tfrac{1}{2} J_1 h^{m-2} x(x-h) + \tfrac{1}{3} J_2 h^{m-3} x(x-h)(x-2h) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m+1} J_m h^{m-(m+1)} x(x-2h)\ldots(x-mh)$$

womit unsere Aufgabe vollständig gelöst ist. So hat man z. B. für $m = 4$

$$J_1 = \frac{1}{1} 1^4 = 1$$

$$J_2 = \frac{1}{1.2}(2^4 - 2_1\ 1^4) = 7$$

Digitized by Google

$$J_3 = \frac{1}{1.2.3}(3^4 - 3_1.2^4 + 3_2.1^4) = 6$$

$$J_4 = \frac{1}{1.2.3.4}(4^4 - 4_1.3^4 + 4_2.2^4 - 4_3.1^4) = 1$$

und mithin

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{2}h^2 x(x\text{-}h) + \frac{7}{3}hx(x\text{-}h)(x\text{-}2h)$$

$$+ \frac{6}{4}x(x\text{-}h)(x\text{-}2h)(x\text{-}3h) + \frac{1}{5}\frac{1}{h}x(x\text{-}h)(x\text{-}2h)(x\text{-}3h)(x\text{-}4h).$$

Es giebt endlich noch eine dritte Methode zur Summirung rationaler ganzer algebraischer Funktionen und diese ist praktisch, d. h. wenn es sich um numerische Werthe handelt, die bequemste, obgleich sie keine elegante Darstellung in allgemeinen Symbolen zulässt. Sei nämlich

8) $f(x) = \Sigma(Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Mx^\mu)$

so ist

$$\Delta f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Mx^\mu$$

und wenn man für x einen beliebigen speziellen Zahlenwerth a substituirt, so erfährt man hieraus den Betrag von $\Delta f(a)$. Indem man nun auch in den leicht zu entwickelnden folgenden Differenzen $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$, ... dieselbe Spezialisirung vornimmt, erhält man eben so leicht $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$, ... und diese Reihe setzt man soweit fort, bis die Differenzen Null werden, was bei jeder ganzen rationalen algebraischen Funktion eintritt, sobald der Exponent von Δ den Grad der Funktion übersteigt. Substituirt man die so gefundenen Werthe von $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$ etc. in die bekannte Formel

9) $$f(x) = f(a) + \frac{x\text{-}a}{1.h}\Delta f(a) + \frac{(x\text{-}a)(x\text{-}a\text{-}h)}{1.2.h^2}\Delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{(x\text{-}a)(x\text{-}a\text{-}h)(x\text{-}a\text{-}2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 f(a) + \ldots$$

so erhält man auf der Stelle die gesuchte Summe $f(x) = \Sigma(Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots)$ und der noch unbestimmte Werth von $f(a)$ bildet darin einen Theil der willkürlichen Constante. Um z. B. $\Sigma(x^2\text{-}5x)$ zu entwickeln, setzt man

$$f(x) = \Sigma(x^2\text{-}5x) \text{ oder } f(a) = \Sigma(a^2\text{-}5a)$$

Digitized by Google

woraus folgt

$$\Delta f(a) = a^2 - 5a$$
$$\Delta^2 f(a) = 2ah + h^2 - 5h$$
$$\Delta^3 f(a) = 2h^2$$
$$\Delta^4 f(a) = \Delta^5 f(a) = \ldots = 0.$$

Nach Formel 9) ist nun

$$f(x) \text{ d. h. } \Sigma(x^2 - 5x)$$
$$= f(a) + \frac{x-a}{1.h}(a^2-5a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}(2ah+h^2-5h)$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3.h^3} 2h^2.$$

Da a noch willkürlich genommen werden darf, so können wir es auch $= 0$ setzen, woraus sich nun sehr einfach die Formel

$$\Sigma(x^2-5x) = C + \frac{1}{2}x(x-h)(h-\frac{5}{h}) + \frac{1}{3}x(x-h)(x-2h)\frac{1}{h}$$

ergiebt, bei welcher $f(0)$ in die ohnehin zuzusetzende willkürliche Constante eingerechnet worden ist.

§. 5.

Endliche Integration gebrochener rationaler algebraischer Funktionen.

Unter den Fundamentalformeln des §. 2. befindet sich nur eine einzige (No. 3.), welche die Summirung eines gebrochenen algebraischen Ausdruckes darstellt; da wir aber andererseits noch kein anderes Mittel zur Integration zusammengesetzter Funktionen besitzen, als das ihrer Reduktion auf einfachere Funktionen, deren Summen bekannt sind, so folgt aus jener Bemerkung, dass wir bis jetzt nur solche gebrochene rationale algebraische Funktionen werden integriren können, die als Summen von Ausdrücken wie

$$\frac{A}{x(x+h)}, \quad \frac{B}{x(x+h)(x+2h)}, \quad \frac{C}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}, \ldots$$

angesehen werden dürfen. Die allgemeine Form solcher Funktionen ist leicht zu finden; denn bringt man sämmtliche Glieder der Reihe

Digitized by Google

$$1)\quad \frac{A}{x(x+h)} + \frac{B}{x(x+h)(x+2h)} + \frac{C}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)} + \dots$$
$$\dots + \frac{M}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{m-1}h)}$$

auf gleichen Nenner, so ist der Zähler

$$\begin{aligned} & A(x+2h)(x+3h)\ \dots\ (x+\overline{m-1}h) \\ 2)\quad & + B(x+3h)(x+4h)\ \dots\ (x+\overline{m-1}h) \\ & + C(x+4h)(x+5h)\ \dots\ (x+\overline{m-1}h) \\ & \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \quad + M \end{aligned}$$

und wenn man die angedeuteten Multiplikationen ausführt, so giebt das erste Produkt alle Potenzen des x von der 0ten bis zur $(m\text{-}2)$ten, das zweite alle von der 0ten bis zur $(m\text{-}3)$ten etc. Ordnet man nachher Alles nach Potenzen von x, so nimmt der Zähler die Form $a + bx + cx^2 + \dots + kx^{m-2}$ an und das in No. 1) aufgestellte Aggregat geht in einen Ausdruck von der Form

$$3)\qquad \frac{a + bx + cx^2 + \dots + kx^{m-2}}{x(x+h)(x+2h)\ \dots\ (x+\overline{m-1}h)}$$

über. Umgekehrt ist aber auch leicht zu sehen, dass jeder Ausdruck von der vorstehenden Form — $a, b, c, \dots k$ mögen sein was sie wollen — nach dem Schema 1) zerlegt werden kann. Denn denkt man sich beiderseits mit dem Nenner multiplizirt, so ist

$$\begin{aligned} & a + bx + cx^2 + \dots + kx^{m-2} \\ = & A(x+2h)(x+3h)\ \dots\ (x+\overline{m-1}h) \\ + & B(x+3h)(x+4h)\ \dots\ (x+\overline{m-2}h) \\ & \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \quad + L(x+\overline{m-1}h) \\ & \quad + M \end{aligned}$$

und wenn man beiderseits die Coeffizienten gleicher Potenzen von x, also die Coeffizienten von $x^0, x^1, \dots x^{m-2}$ vergleicht, so erhält man m-2 Gleichungen ersten Grades zwischen den m-2 Unbekannten $A, B, C, \dots M$, woraus die Bestimmung derselben jederzeit möglich ist.

Digitized by Google

Nachdem man diese erlangt hat, führt die beiderseitige Integration der Gleichung:

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots. + kx^{m-2}}{x(x+h)(x+2h) \ldots. (x+\overline{m-1}h)}$$

$$= \frac{A}{x(x+h)} + \frac{B}{x(x+h)(x+2h)} + \frac{C}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{M}{x(x+h)(x+2h) \ldots. (x+\overline{m-1}h)}$$

unter Anwendung von No. 3.) in §. 2. sogleich zu der Summenformel

$$4) \qquad \Sigma \frac{a + bx + cx^2 + \ldots. + kx^{m-2}}{x(x+h)(x+2h) \ldots. (x+\overline{m-1}h)}$$

$$= -\frac{1}{h}\frac{A}{x} - \frac{1}{2h}\frac{B}{x(x+h)} - \frac{1}{3h}\frac{C}{x(x+h)(x+2h)} - \ldots.$$

$$\ldots. - \frac{1}{(m-1)h}\frac{M}{x(x+h)x+2h) \ldots. (x+\overline{m-2}h)}.$$

Um dieses Verfahren durch ein Beispiel zu erläutern sei:

$$\frac{3 + 5x}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{A}{x(x+h)} + \frac{B}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$3 + 5x = A(x+2h) + B$$

$$= 2Ah + B + Ax$$

und aus $2Ah + B = 3$ und $A = 5$ ergiebt sich $B = 3 - 10h$; mithin ist

$$\Sigma \frac{3 + 5x}{x(x+h)(x+2h)} = \Sigma \frac{5}{x(x+h)} + \Sigma \frac{3 - 10h}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$= -\frac{1}{h}\frac{5}{x} - \frac{1}{2h}\frac{3 - 10h}{x(x+h)}.$$

Wenn in der gebrochenen rationalen algebraischen Funktion, die wir betrachtet haben, der Zähler den $(m-2)^{\text{ten}}$ Grad übersteigt, so ist das bisherige Verfahren zwar theilweis noch anwendbar, führt aber auf eine uns noch unbekannte Integration. Betrachten wir zunächst den Fall, wo der Zähler ausser den Potenzen x^0, x^1, ... x^{m-2} auch noch die Potenz x^{m-1} enthält, so ist leicht zu sehen, dass man in diesem Falle setzen darf:

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots. + kx^{m-2} + lx^{m-1}}{x(x+h)(x+2h) \ldots. (x+m-1h)}$$

Digitized by Google

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x(x+h)} + \frac{C}{x(x+h)(x+2h)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{N}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}.$$

Denn bringt man beide Seiten auf gleichen Nenner und ordnet hierauf Alles nach Potenzen von x, so erhält man m Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der m Unbekannten $A, B, C, \ldots N$. Beiderseitige endliche Integration giebt jetzt

$$\Sigma \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{m-2} + lx^{m-1}}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}$$

$$= A\Sigma\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\frac{B}{x} - \frac{1}{2h}\frac{C}{x(x+h)} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{(m-1)h}\frac{N}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-2}h)}$$

wo nun auf der rechten Seite Alles bis auf $\Sigma\frac{1}{x}$ bekannt ist. Hat man endlich die Funktion

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + px^n}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}$$

zu integriren, wo $n \geqq m$ ist, so dividirt man zunächst mit $(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)$ so lange in $a + bx + cx^2 + \ldots + px^n$ bis die Dimension des Restes kleiner als die des Divisors wird; man erhält dann ein Resultat von der Form:

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + px^n}{(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}$$

$$= a' + b'x + c'x^2 + \ldots + g'x^{n-(m-1)}$$

$$+ \frac{a'' + b''x + c''x^2 + \ldots + k''x^{m-2}}{(x+h)(x+2h) \ldots + (x+\overline{m-1}h)}$$

und nach beiderseitiger Division mit x

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + px^n}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}$$

$$= \frac{a'}{x} + b' + c'x + \ldots + g'x^{n-m}$$

$$+ \frac{a'' + b''x + c''x^2 + \ldots + k''x^{m-2}}{x(x+h)(x+2h) \ldots (x+\overline{m-1}h)}$$

Digitized by Google

und wenn man beiderseits integrirt, so sind rechts alle Integrationen bis auf die erste ausführbar. Um dieses Verfahren durch ein Beispiel zu illustriren, sei

$$\frac{1+x^5}{x(x+h)(x+2h)}$$

die zu integrirende Funktion. Man findet zunächst

$$\frac{1+x^5}{(x+h)(x+2h)} = \frac{x^5+1}{x^2+3xh+2h^2}$$

$$= x^3 - 3x^2h + 7xh^2 - 15h^3 + \frac{43xh^4+30h^5+1}{x^2+3xh+2h^2}$$

und durch Division mit x

$$\frac{1+x^5}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$= -15h^3\frac{1}{x} + 7h^2 - 3hx + x^2 + \frac{1+30h^5+31h^4x}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$= -15h^3\frac{1}{x} + 7h^2 - 3hx + x^2 + \frac{31h^4}{x(x+h)} + \frac{1-32h^5}{x(x+h)(x+2h)}$$

und hieraus ergiebt sich nun sogleich

$$\Sigma\frac{1+x^5}{x(x+h)(x+2h)} = -15h^3\Sigma\frac{1}{x} + 7h^2.\frac{x}{h} - 3h\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$+\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}xh\right)$$

$$-\frac{31h^4}{h}\frac{1}{x} - \frac{1-32h^5}{2h}\frac{1}{x(x+h)}$$

und wenn man Alles auf gleichen Nenner bringt

$$\Sigma\frac{1+x^5}{x(x+h)(x+2h)} = -15h^3\Sigma\frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{6h}\frac{3+90h^5+186h^4x-52h^3x^2-40h^2x^3+10hx^4-2x^5}{x(x+h)}.$$

Man sieht aus diesen Erörterungen, dass sich jede Funktion von der Form 5) integriren lassen würde, sobald $\Sigma\frac{1}{x}$ bekannt wäre. Ist der Nenner der gebrochenen algebraischen Funktion nicht von der Form $x(x+h)$ $(x+2h)$ ...., so kann man mit den bisherigen Mitteln die Summirung nicht ausführen. Noch weniger glückt dieselbe bei irrationalen algebraischen Funktionen, da unter unseren Fundamentalformeln keine ein-

Digitized by Google

zige vorkommt, welche die Integration einer irrationalen algebraischen Funktion zeigte. Wie man sich in allen diesen Fällen zu helfen hat, werden wir später zeigen, wovon den ganz allgemeinen Mitteln der Integration die Rede sein wird.

§. 6.

Summirung von $x^m a^x$, $x^m \cos x$ und $x^m \sin x$.

Nachdem wir uns mit den endlichen Integralen algebraischer Funktionen beschäftigt haben, betrachten wir die Integrale der Transscendenten, bei denen es ebenfalls eine Reihe von Fällen giebt, in welchen die bisherigen Mittel zur Summirung ausreichen. Wir werden diese Fälle, von denen schon die Ueberschrift einige namhaft macht, der Reihe nach durchgehen.

I. Nimmt man von dem Ausdrucke $x^m a^x$ die Differenz, so ist

$$\Delta(x^m a^x) = (x+h)^m a^{x+h} - x^m a^x$$

und wenn m als positive ganze Zahl vorausgesetzt wird, so kann man den $(x+h)^m$ in eine endliche Reihe verwandeln, aus welcher man ohne Schwierigkeit findet:

$$\Delta(x^m a^x) = (a^h\text{-}1)x^m a^x + m_1 h a^h x^{m-1} a^x + m_2 h^2 a^h x^{m-2} a^x + m_3 h^3 a^h x^{m-3} a^x + \dots$$

Beiderseitige endliche Integration giebt hier

$$x^m a^x = (a^h\text{-}1)\Sigma(x^m a^x) + m_1 h a^h \Sigma(x^{m-1} a^x) + m_2 h^2 a^h \Sigma(x^{m-2} a^x) + m_3 h^3 a^h \Sigma(x^{m-3} a^x) + \dots$$

und wenn $\Sigma(x^m a^x)$ auf eine Seite allein gebracht wird,

$$1)\quad \Sigma(x^m a^x) = \frac{x^m a^x}{a^h\text{-}1} - \frac{a^h}{a^h\text{-}1}\left[m_1 h \Sigma(x^{m-1} a^x) + m_2 h^2 \Sigma(x^{m-2} a^x) + \dots\right].$$

Diese Gleichung dient als Reduktionsformel in so fern sie die Summirung von $x^{m-1} a^x$, $x^{m-2} a^x$ etc. zurückführt. Es ist aber $\Sigma(x^0 a^x)$ bekannt nämlich

$$\Sigma(x^0 a^x) = \frac{a^x}{a^h\text{-}1}$$

Digitized by Google

und nun erhält man der Reihe nach aus der obigen Formel für $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\Sigma(x^1 a^x) = \frac{xa^x}{a^h-1} - \frac{a^h}{a^h-1} h\Sigma(x^0 a^x)$$

$$\Sigma(x^2 a^x) = \frac{x^2 a^x}{a^h-1} - \frac{a^h}{a^h-1}\left[2h\Sigma(x^1 a^x) + h^2\Sigma(x^0 a^x)\right]$$

u. s. f.

oder wenn man jede Gleichung in ihre Nachfolgerin substituirt

$$2) \qquad \Sigma(xa^x) = \frac{xa^x}{a^h-1} - \frac{ha^h a^x}{(a^h-1)^2}$$

$$\Sigma(x^2 a^x) = \frac{xa^x}{a^h-1} - \frac{2hxa^h a^x}{(a^h-1)^2} + \frac{(2h^2a^{2h}-h^2a^h)a^x}{(a^h-1)^3}$$

u. s. w.

Es folgt hieraus von selbst, dass man mittelst dieser Formeln jederzeit das endliche Integral $\Sigma[\varphi(x)a^x]$ finden kann, sobald $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Funktion von x bezeichnet. So hat man z. B.

$$\Sigma[(\alpha+\beta x+\gamma x^2)a^x] = \alpha\Sigma a^x + \beta\Sigma(xa^x) + \gamma\Sigma(x^2a^x)$$

$$= \frac{\gamma}{a^h-1}x^2a^x + \frac{(\beta-2\gamma h)a^h-\beta}{(a^h-1)^2}xa^x$$

$$+ \frac{(\alpha-\beta h+\gamma h^2)a^{2h} - (2\alpha-\beta h-\gamma h^2)a^h + \alpha}{(a^h-1)^3}a^x.$$

II. Mit einiger Modifikation ist das so eben zur Entwickelung von $\Sigma(x^m a^x)$ angewandte Verfahren auch zur Bestimmung von $\Sigma(x^m \cos x)$ und $\Sigma(x^m \sin x)$ brauchbar. Man hat nämlich

$$\Delta[x^m \sin(x-\tfrac{1}{2}h)] = (x+h)^m \sin(x+\tfrac{1}{2}h) - x^m \sin(x-\tfrac{1}{2}h)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}h \,.\, x^m \cos x + m_1 h x^{m-1}\sin(x+\tfrac{1}{2}h) + m_2 h^2 x^{m-2}\sin(x+\tfrac{1}{2}h) + \dots$$

und folglich wenn man nach Division mit $2\sin\frac{1}{2}h$ integrirt und $\Sigma(x^m\cos x)$ auf die linke Seite allein bringt

$$3) \quad \Sigma(x^m \cos x) = \frac{x^m \sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}$$

$$- \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h}\left\{m_1 h\Sigma[x^{m-1}\sin(x+\tfrac{1}{2}h)] + m_2h^2\Sigma[x^{m-2}\sin(x+\tfrac{1}{2}h)] + \dots\right\}.$$

Geht man ähnlich von der Differenz $\Delta[x^m\cos(x-\frac{1}{2}h)]$ aus, so findet sich ebenso leicht

Digitized by Google

$$4)\quad \Sigma(x^m \sin x) = -\frac{x^m \cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h}\left\{m_1 h\Sigma[x^{m-1}\cos(x+\tfrac{1}{2}h)] + m_2 h^2\Sigma[x^{m-2}\cos(x+\tfrac{1}{2}h)] + \ldots\right\}.$$

Diese Formeln führen immer zur Kenntniss von $\Sigma(x^m \cos x)$ nnd $\Sigma(x^m \sin x)$, sobald die Integrale

$$\Sigma(x^{m-1}\cos x)\ ,\ \Sigma(x^{m-2}\cos x)\ ,\ \ldots.\ \Sigma(x^0 \cos x)$$

$$\Sigma(x^{m-2}\sin x)\ ,\ \Sigma(x^{m-2}\sin x)\ ,\ \ldots.\ \Sigma(x^0 \sin x)$$

schon bekannnt sind. Setzt man nämlich in No. 3) und No. 4) $m = 1$, so wird zunächst:

$$5)\quad \Sigma(x\cos x) = \frac{x\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h}\Sigma\sin(x+\tfrac{1}{2}h)$$

$$\Sigma(x\sin x) = -\frac{x\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h}\Sigma\cos(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Nun ist aber wegen $\sin(x+\frac{1}{2}h) = \sin x\cos\frac{1}{2}h + \cos x\sin\frac{1}{2}h$ und $\cos(x+\frac{1}{2}h) = \cos x\cos\frac{1}{2}h - \sin x\sin\frac{1}{2}h$

$$\Sigma\sin(x+\tfrac{1}{2}h) = \cos\tfrac{1}{2}h\Sigma\sin x + \sin\tfrac{1}{2}h\Sigma\cos x$$

$$\Sigma\cos(x+\tfrac{1}{2}h) = \cos\tfrac{1}{2}h\Sigma\cos x - \sin\tfrac{1}{2}h\Sigma\sin x$$

und da $\Sigma\cos x$ und $\Sigma\sin x$ bekannt sind [§. 2. No. 5) und 6)], so geben jetzt die Formeln 5) die Werthe von $\Sigma(x\cos x)$ und $\Sigma(x\sin x)$, nämlich

$$6)\quad \Sigma(x\cos x) = \frac{x\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h\cos(x+\frac{1}{2}h)}{(2\sin\frac{1}{2}h)^2}$$

$$\Sigma(x\sin x) = -\frac{x\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h\sin(x+\frac{1}{2}h)}{(2\sin\frac{1}{2}h)^2}.$$

Nimmt man ferner in den Formeln 3) und 4) $m = 2$, so wird

$$\Sigma(x^2\cos x) = \frac{x^2\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}$$

$$-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h}\left\{2h\Sigma[x\sin(x+\tfrac{1}{2}h)] + h^2\Sigma\sin(x+\tfrac{1}{2}h)]\right\}$$

$$\Sigma(x^2\sin x) = -\frac{x^2\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h}\left\{2h\Sigma[x\cos(x+\tfrac{1}{2}h)] + h^2\Sigma\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\right\}.$$

Man hat nun durch Zerlegung

Digitized by Google

$$\Sigma[x \sin(x+\tfrac{1}{2}h)] = \cos\tfrac{1}{2}h\Sigma(x \sin x) + \sin\tfrac{1}{2}h\Sigma(x \cos x)$$

$$\Sigma[x \cos(x+\tfrac{1}{2}h)] = \cos\tfrac{1}{2}h\Sigma(x \cos x) - \sin\tfrac{1}{2}h\Sigma(x \sin x)$$

und da nach 6) $\Sigma(x \cos x)$ und $\Sigma(x \sin x)$ bekannt sind, so findet man zunächst $\Sigma[x \sin x \sin(x+\frac{1}{2}h)]$ und $\Sigma[x \cos(x+\frac{1}{2}h)]$; substituirt man diess und die bereits bekannten Werthe von $\Sigma \sin(x+\frac{1}{2}h)$ und $\Sigma \cos(x+\frac{1}{2}h)$ so findet man $\Sigma(x^2 \cos x)$ und $\Sigma(x^2 \sin x)$. Wie man auf diese Weise weiter gehen kann erhellt nach diesen Bemerkungen leicht.

Es giebt übrigens noch ein zweites Verfahren um $\Sigma(x^m \cos x)$ und $\Sigma(x^m \sin x)$ zu finden und welches auf den bekannten Formeln

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{xi}+e^{-xi})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi}-e^{-xi})$$

beruht, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und $i = \sqrt{-1}$ ist. Man berechne nämlich erst $\Sigma(x^m a^x)$ nach dem in I. gegebenen Vorschriften und setze nun einmal $a = e^i$ und darauf $a = e^{-i}$, man findet so

$$\Sigma[x^m(e^i)^x] = \Sigma(x^m e^{xi}) \text{ und } \Sigma[x^m(e^{-i})^x] = \Sigma(x^m e^{-xi}).$$

Davon ist die halbe Summe:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(x^m e^{xi}) + \tfrac{1}{2}\Sigma(x^m e^{-xi}) = \Sigma[\tfrac{1}{2}x^m(e^{xi}+e^{-xi})]$$
$$= \Sigma(x^m \cos x)$$

und die halbe Differenz dividirt durch i

$$\frac{1}{2i}\Sigma(x^m e^{xi}) - \frac{1}{2i}\Sigma(x^m e^{-xi}) = \Sigma\left[\frac{1}{2i}x^m(e^{xi}-e^{-xi})\right]$$
$$= \Sigma(x^m \sin x).$$

Zu einer blos schematischen Darstellung ist diese Methode hinreichend, *in praxi* aber wird sie etwas weitläufig.

§. 7.

Integration von $\cos^m x$, $\sin^m x$ und ähnlichen Funktionen.

Ebenso leicht als sich die Integrale $\Sigma \cos x$ und $\Sigma \sin x$ finden lassen, kann man auch die etwas allgemeineren $\Sigma \cos px$ und $\Sigma \sin px$ bestimmen, worin p eine beliebige constante Zahl bedeutet. Man

Digitized by Google

braucht nur zu bemerken, dass, sobald px für x gesetzt wird, auch ph an die Stelle von h tritt und dass folglich

$$1)\quad \Sigma \cos px = \frac{\sin p(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}ph}$$

$$2)\quad \Sigma \sin px = -\frac{\cos p(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}ph}$$

sein muss, was man auch umgekehrt leicht verifiziren kann. Wäre nun eine Funktion $\varphi(x)$ zu integriren, von der man wüsste, dass sie sich in eine Reihe von der Form

$$A\cos\alpha x + B\cos\beta x + C\cos\gamma x + \ldots. + M\cos\mu x$$

verwandeln liesse, so würde die postulirte Integration ungemein leicht auszuführen sein, denn man hätte:

$$\Sigma\varphi(x) = A\Sigma\cos\alpha x + B\Sigma\cos\beta x + \ldots. + M\Sigma\cos\mu x$$

und hier kann man alle auf der rechten Seite vorkommenden Integrationen nach der Formel 1) bewerkstelligen. Dasselbe Verfahren würde anwendbar sein, wenn es sich um die Integration einer Funktion $\psi(x)$ handelte, welche in eine Reihe von der Form

$$A\sin\alpha x + B\sin\beta x + C\sin\gamma x + \ldots. + M\sin\mu x$$

umgesetzt werden könnte. In der That giebt es einige Funktionen der Art und diese wollen wir näher betrachten.

I. Bezeichnen wir wieder $\sqrt{-1}$ mit i und setzen

$$3)\qquad \begin{aligned} \cos x &= i\sin x = u \\ \cos x &- i\sin x = v \end{aligned}$$

so ist $2\cos x = u + v$ und mithin $(2\cos x)^m = (u+v)^m$ d. i.

$$(2\cos x)^m = m_0u^m + m_1u^{m-1}v + m_2u^{m-2}v^2 + \ldots.$$

und da man ebensowohl $2\cos x = v + u$ setzen konnte, auch:

$$(2\cos x)^m = m_0v^m + m_1v^{m-1}u + m_2v^{m-2}u^2 + \ldots.$$

Addirt man beide Gleichungen, so kann man dem Aggregate leicht die Form geben:

$$\begin{aligned} 2(2\cos x)^m = m_0(u^m+v^m) &+ m_1uv(u^{m-2}+v^{m-2}) \\ &+ m_2(uv)^2(u^{m-4}+v^{m-4}) \\ &+ m_3(uv)^3(u^{m-6}+v^{m-6}) + \ldots. \end{aligned}$$

Nun ist aber $uv = \cos^2x - i^2\sin^2x = 1$, und ferner

$$u^q + v^q = (\cos x+i\sin x)^q + (\cos x-i\sin x)^q$$

Digitized by Google

d. i. dem Moivre'schen Theoreme zufolge

$$u^q + v^q = (\cos qx + i \sin qx) + (\cos qx - i \sin qx) = 2\cos qx.$$

Unter diesen Bemerkungen folgt aus der obigen Gleichung für $q = m$, $m - 2$, $m - 4$ etc.

$$2(2\cos x)^m = m_0 2\cos mx + m_1 2\cos(m-2)x + m_2 2\cos(m-4)x + \dots.$$

oder nach Division mit 2^{m+1},

$$4)\quad \cos^m x = \frac{1}{2^m}\left[\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x + \dots\right]$$

wobei die Reihe soweit fortgesetzt wird, bis sie wegen der Binomialkoeffizienten von selbst abbricht. Nimmt man beiderseits das endliche Integral und wendet rechts die Formel 1) für $q = m$, $m - 2$, $m - 4$ etc. an, so ergiebt sich augenblicklich

$$5)\quad \Sigma\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left[\frac{\sin m(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}mh} + m_1 \frac{\sin(m-2)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-2)h} + m_2 \frac{\sin(m-4)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-4)h} + \dots\right].$$

Hierbei ist noch eine Bemerkung zu machen. Für ein gerades m nämlich kommt in der Reihe 4) auch das Glied $m_{\frac{1}{2}m}\cos(m-m)x$ vor, welches constant wird, ihm entspricht in der Reihe 6) das Glied

$$m_{\frac{1}{2}m}\frac{\sin(m-m)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-m)h} = \frac{0}{0}.$$

Da aber $\Sigma[m_{\frac{1}{2}m}\cos(m-m)x] = m_{\frac{1}{2}m}\Sigma 1 = m_{\frac{1}{2}m}\frac{x}{h}$ ist, so muss an die Stelle des unbestimmt vieldeutig werdenden Gliedes der Ausdruck $m_{\frac{1}{2}m}\frac{x}{h}$ gesetzt werden. Für $m = 3$ und $m = 4$ erhält man z. B.

$$\Sigma\cos^3 x = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 3(x-\frac{1}{2}h}{2\sin\frac{3}{2}h} + 3\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + 3\frac{\sin(-1)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin(-\frac{1}{2}h)} + \frac{\sin(-3)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin(-\frac{3}{4}h)}\right]$$

oder kürzer

$$\Sigma\cos^3 x = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 3(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{3}{2}h} + 3\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}\right]$$

$$\Sigma\cos^4 x = \frac{1}{16}\left[\frac{\sin 4(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{4}{2}h} + 4\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h} + 6\frac{\sin 0(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin 0h}\right.$$

$$+ 4 \frac{sin(-2)(x-\frac{1}{2}h)}{2sin(-\frac{2}{2}h)} + \frac{sin(-4)(x-\frac{1}{2}h)}{2sin(-\frac{4}{2}h)} \Big]$$

d. i.

$$\Sigma cos^4 x = \frac{3}{8}\frac{x}{h} + \frac{1}{16}\Big[\frac{sin\,4(x-\frac{1}{2}h)}{sin\,2h} + 4\frac{sin\,2(x-\frac{1}{2}h)}{sin\,h}\Big].$$

II. Aus den beiden Gleichungen 3) folgt ferner $2i\,sin\,x = u - v$ mithin $(2i\,sin\,x)^m = (u-v)^m$

6) $(2i\,sin\,x)^m = m_0 u^m - m_1 u^{m-1} v + m_2 u^{m-2} v^2 - \ldots.$

Ist nun erstens m eine gerade Zahl, so hat man $(u\text{-}v)^m + (v\text{-}u)^m$ mithin auch

$$(2i\,sin\,x)^m = m_0 v^m - m_1 v^{m-1} u + m_2 v^{m-2} u^2 - \ldots.$$

Durch Addition dieser Gleichung zur vorhergehenden wird jetzt

$$2(2i\,sin\,x)^m = (u^m + v^m) - m_1 uv(u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ m_2 (uv)^2 (u^{m-2} + v^{m-2}) - \ldots.$$

d. i. weil $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$,

7) $$sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m}\Big[cos\,mx - m_1 cos(m-2)x + m_2 cos(m-4)x - \ldots.\Big].$$

Ist dagegen m ungerade, so ist $(u\text{-}v)^m = -(v\text{-}u)^m$ mithin

$$-(2i\,sin\,x)^m = m_0 v^m - m_1 v^{m-1} u + m_2 v^{m-2} u^2 - \ldots.$$

und wenn man diese Gleichung von der in 6) verzeichneten abzieht, so kommt

$$2(2i\,sin\,x)^m = (u^m - v^m) - m_1 uv(u^{m-2} - v^{m-2})$$
$$+ m_2 (uv)^2 (u^{m-4} - v^{m-4}) \ldots.$$

Dabei ist $uv = 1$ und

$$u^q - v^q = (cos\,qx + i\,sin\,qx) - (cos\,qx - i\,sin\,qx) = 2i\,sin\,qx$$

mithin, wenn diess für $q = m$, $m\text{-}2$, $m\text{-}4$ etc. benutzt wird,

$2(2i\,sin\,x)^m = 2i\,sin\,mx - m_1 2i\,sin(m-2)x + m_2 2i\,sin(m-4)x - \ldots.$

und durch Division mit $2^{m+1}i$,

8) $$sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}}{2^m}\Big[sin\,mx - m_1 sin(m-2)x + m_2 sin(m-4)x - \ldots.\Big].$$

Um nun $\Sigma sin^m x$ zu finden benutzt man die Formel 7) oder 8) jenachdem m gerade oder ungerade ist. Man hat im ersten Falle

9) $$\Sigma sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^m}\Big[\frac{sin\,m(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\frac{1}{2}mh} - m_1\frac{sin(m-2)(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\frac{1}{2}(m-2)h}$$

Digitized by Google

$$+ m_2 \frac{\sin(m-4)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-4)h} - \ldots\Big]$$

und im zweiten unter Benutzung von Formel 2)

$$10)\ \Sigma \sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}}{2^m}\Big[\frac{\cos m(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}mh} - m_1 \frac{\cos(m-2)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-2)h}$$

$$+ m_2 \frac{\cos(m-4)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}(m-4)h} - \ldots\Big]$$

wobei im ersten Falle die vorhin über das unbestimmt scheinende Glied gemachte Bemerkung zu wiederholen ist. Für $m = 2$ giebt z. B. die Formel 9)

$$\Sigma \sin^2 x = -\frac{1}{4}\Big[\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h} - 2\frac{\sin 0(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin 0h} + \frac{\sin(-2)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin(-\frac{1}{2}h)}\Big]$$

$$= 2\frac{x}{h} - \frac{1}{4}\frac{\sin 2(x-h)}{\sin h}$$

und für $m = 3$ die Formel 10)

$$\Sigma \sin^3 x = \frac{1}{8}\Big[\frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{3}{2}h} - 3\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + 3\frac{\cos(-1)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin(-\frac{1}{2}h)}$$

$$- \frac{\cos(-3)(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin(-\frac{3}{2}h)}\Big]$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\frac{\cos^3(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{3}{2}h} - 3\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}\Big].$$

Da man $\cos^m x$ und $\sin^n x$ für sich in Reihen verwandeln kann, welche nach den Cosinus oder Sinus von Vielfachen des Bogens x fortschreiten, so muss sich auch das Produkt $\cos^m x \sin^n x$ in eine solche Reihe umsetzen lassen. Denkt man sich nämlich die Multiplikation der beiden Reihen ausgeführt, so entstehen für ein gerades n lauter Partialprodukte von je zwei Cosinus und für ein ungerades n von je einem Cosinus aus der ersten und je einem Sinus aus der zweiten Reihe. Derartige Produkte lassen sich aber immer in eine Summe oder Differenz von zwei Cosinus oder zwei Sinus zerlegen, so dass jederzeit ein Resultat von einer der Formen:

$$11)\quad \cos^m x \sin^n x = A\cos\alpha x + B\cos\beta x + \ldots + M\cos\mu x$$

$$\cos^m x \sin^n x = A\sin\alpha x + B\sin\beta x + \ldots + M\sin\mu x$$

worin α, β, γ, ... positive ganze Zahlen sind, zum Vorschein kom-

Digitized by Google

men muss, es lässt sich mithin auch $\Sigma(\cos^m x \sin^n x)$ jederzeit entwickeln. So ist z. B.

$$\begin{aligned} \cos^3 x \sin^2 x &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \,.\, \tfrac{1}{2}(-\cos 2x + 1) \\ &= \tfrac{1}{8}(-\cos 3x \cos 2x - 3\cos x \cos 2x + \cos 3x + 3\cos x) \end{aligned}$$

oder weil $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 5x$,

$$\cos x \cos 2x = \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 3x,$$

$$\cos^3 x \sin^2 x = \tfrac{1}{6}(-\cos 5x - \cos 3x + 2\cos x)$$

und durch Integration

$$\Sigma(\cos^3 x \sin^2 x) = \frac{1}{32}\left[-\frac{\sin 5(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{5}{2}h} - \frac{\sin 3(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{3}{2}h} + 2\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}\right].$$

Dagegen ist

$$\begin{aligned} \cos^2 x \sin^3 x &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x + 1) \,.\, \tfrac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x) \\ &= \tfrac{1}{8}(-\sin 3x \cos 2x + 3\sin x \cos 2x - \sin 3x + 3\sin x) \end{aligned}$$

und wegen $\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x$,

$$\sin x \cos 2x = \tfrac{1}{2}\sin 3x - \tfrac{1}{2}\sin x,$$

$$\cos^2 x \sin^3 x = \tfrac{1}{16}(-\sin 5x + \sin 3x + 2\sin x)$$

und

$$\Sigma(\cos^2 x \sin^3 x) = \frac{1}{32}\left[\frac{\cos 5(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{5}{2}h} - \frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{3}{2}h} - 2\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}\right].$$

Man kann übrigens noch ein paar Schritte weiter gehen. Setzt man nämlich in den bekannten Werthen von

$$\Sigma(x^p \cos x) \text{ und } \Sigma(x^p \sin x)$$

$\varkappa x$ für x also $\varkappa(x+h)$ für $x+h$, so tritt $\varkappa h$ an die Stelle von h, und wenn man diese Substitutionen ausführt, so erhält man demnach die Werthe der Integrale

$$\Sigma(\varkappa^p x^p \cos \varkappa x),\ \Sigma(\varkappa^p x^p \sin \varkappa x)$$

und durch Division mit $\varkappa^p$ auch die von

$$\Sigma(x^p \cos \varkappa x) \text{ und } \Sigma(x^p \sin \varkappa x).$$

Daraus folgt, dass man auch jeden Ausdruck von der Form $x^p \cos^m x \sin^n x$ integriren kann, denn man hat nach 11)

$$\begin{aligned} &\Sigma(x^p \cos^m x \sin^n x) \\ &= A\Sigma(x^p \cos \alpha x) + B\Sigma(x^p \cos \beta x) + \ldots + M\Sigma(x^p \cos \mu x) \end{aligned}$$

oder im Fall n ungerade ist

$$\Sigma(x^p \cos^m x \sin^n x)$$

Digitized by Google

$$= A\Sigma(x^p \sin \alpha x) + B\Sigma(x^p \sin \beta x) + \ldots + M\Sigma(x^p \sin \mu x)$$

wo sich nun die Integrationen rechts ausführen lassen. So ist z. B. $\cos^2 x \sin x = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x$, mithin

$$\Sigma(x \cos^2 x \sin x) = \tfrac{1}{4}\Sigma(x \sin x) + \tfrac{1}{4}\Sigma(x \sin 3x).$$

Es ist aber

$$\Sigma(x \sin x) = -\frac{x \cos(x-\frac{1}{2}h)}{2 \sin \frac{1}{2}h} + \frac{h \sin(x+\frac{1}{2}h)}{(2 \sin \frac{1}{2}h)^2}$$

und wenn man $3x$, $3h$ für x und h substituirt und nachher mit 3 dividirt

$$\Sigma(x \sin 3x) = -\frac{x \cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{2 \sin \frac{3}{2}h} + \frac{h \sin 3(x+\frac{1}{2}h)}{(2 \sin \frac{3}{2}h)^2}.$$

Die Substitution von $\Sigma(x \sin x)$ und $\Sigma(x \sin 3x)$ führt nun sogleich zur Kenntniss von $\Sigma(x \cos^2 x \sin x)$.

Bezeichnet endlich $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Funktion von x, so kann man auch noch die endliche Integration

$$\Sigma[\varphi(x) \cos^m x \sin^n x]$$

bewerkstelligen, denn vermöge der Bedeutung von $\varphi(x)$ muss diese Funktion von der Form

$$ax^p + bx^q + cx^r + \ldots + gx^s$$

sein, wo $p, q, \ldots s$ ganze positive Zahlen bedeuten. Man hat daher

$$\Sigma[\varphi(x) \cos^m x \sin^n x]$$

$$= a\Sigma(x^p \cos^m x \sin^n x) + b\Sigma(x^q \cos^m x \sin^n x) + \ldots + g\Sigma(x^s \cos^m x \sin^n x)$$

und hier sind die auf der rechten Seite postulirten Summirungen nach den vorhin gegebenen Andeutungen ausführbar, wenn auch die wirkliche Aufstellung der völlig entwickelten Ausdrücke oft noch ziemlich weitläufige Rechnungen erfordert, die jedoch keinerlei Schwierigkeiten darbieten.

Hiermit haben wir das Ende der Reihe von Funktionen erreicht, welche sich in völlig geschlossener Form integriren lassen; zwar wird man bei ganz speziellen Funktionen hie und da durch einen besonderen Kunstgriff, den die Individualität der Funktion an die Hand giebt, noch die eine oder andere Integration ermöglichen, allgemeine Regeln aber für andere als die bisherigen Funktionen giebt es nicht mehr, wenn man die endlichen Integrale in abgeschlossenen Ausdrücken dar-

Digitized by Google

gestellt wissen will. Verzichtet man jedoch auf diese Bedingung, so lässt sich eine nicht geringe Anzahl von Hülfsmitteln zur endlichen Integration auffinden, welche eine beliebig grosse Annäherung an das gesuchte Integral gestatten. Bevor wir aber diese Untersuchungen eröffnen, wollen wir erst die vielfachen Summen betrachten.

§. 8.

Die vielfachen endlichen Integrale.

Der Uebergang von einer Funktion $\varphi(x)$ zu ihrem endlichen Integrale ist, rein analytisch betrachtet, nichts Anderes als eine Operation, mittelst deren man von einer gegebenen Funktion zu einer zweiten Funktion fortschreitet. Man kann daher auch diese zweite Funktion als eine ursprünglich gegebene ansehen und auf sie wieder dieselbe Operation anwenden, wodurch man auf eine dritte Funktion kommt, von dieser geht man auf dieselbe Weise zu einer vierten weiter und kann überhaupt die durch das Σ angedeutete Operation beliebig vielmal nach einander ausführen. Man erhält so aus $\varphi(x)$ der Reihe nach die Funktionen

$$\Sigma\varphi(x),\quad \Sigma[\Sigma\varphi(x)],\quad \Sigma[\Sigma[\Sigma\varphi(x)]],\quad \text{etc.}$$

welche man kürzer durch

$$\Sigma\varphi(x),\quad \Sigma^{(2)}\varphi(x),\quad \Sigma^{(3)}\varphi(x),\quad \ldots.$$

bezeichnet. Ist nun z. B. $\Delta f(x) = \varphi(x)$, so hat man umgekehrt $\Sigma\varphi(x) = f(x)$, wozu man aber noch eine willkürliche Constante C hinzusetzen darf, so dass allgemeiner

$$\Sigma\varphi(x) = f(x) + C$$

ist. Nimmt man beiderseits wieder das endliche Integral, so wird

$$\Sigma^{(2)}\varphi(x) = \Sigma f(x) + C\Sigma x^0$$

oder wenn $\Sigma f(x)$ kurz mit $f_1(x)$ bezeichnet wird,

$$\Sigma^{(2)}\varphi(x) = f_1(x) + C\frac{x}{h} + C'$$

wo C' eine neue willkürliche Constante bedeutet. Hieraus folgt weiter

$$\Sigma^{(3)}\varphi(x) = \Sigma f_1(x) + \frac{C}{h}\Sigma x + C'\Sigma x^0$$

Digitized by Google

oder für $\Sigma f_1(x) = f_2(x)$,

$$\Sigma^{(3)}\varphi(x) = f_2(x) + \frac{C}{h}\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x\right) + C'\frac{x}{h} + C''$$

$$= f_2(x) + \frac{1}{2}\frac{C}{h^2}x^2 + \frac{C'-\frac{1}{2}C}{h}x + C''.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Schlüsse und zugleich das Gesetz, nach welchem sich die Ausdrücke rechts bilden; man hat nämlich

1) $\Sigma^{(n)}\varphi(x) = f_{(n-1)}(x) + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$

worin A_1, A_2, ... A_{n-1} willkürliche Constanten bedeuten. Hätte man dagegen bei den successiven endlichen Integrationen keine Rücksicht auf die willkürlichen Constanten genommen, welche man bei jeder Integration hinzufügen darf, so würde man der Reihe nach blos

$$\Sigma\varphi(x) = f(x)$$

$$\Sigma^{(2)}\varphi(x) = \Sigma f(x) = f_1(x)$$

$$\Sigma^{(3)}\varphi(x) = \Sigma f_1(x) = f_2(x)$$

. . . .

d. i. überhaupt $\Sigma^{(n)}\varphi(x) = f_{(n-1)}(x)$ erhalten haben. Vergleicht man diess mit No. 1), so ergiebt sich folgende Regel: „Wenn ein vielfaches Integral $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$ ohne Rücksicht auf willkürliche Constanten entwickelt worden ist, so geschieht die Complettirung desselben dadurch, dass man noch die algebraische Funktion

$$A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots. + A_{n-1}x + A_n$$

hinzusetzt, in welcher A_1, A_2, ... A_n willkürliche Constanten bedeuten.“ Gewöhnlich schreibt man übrigens diesen Ausdruck in umgekehrter Ordnung und giebt ihm dann die etwas elegantere Form

2) $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots. + C_{n-1}x^{n-1}$.

Wir wollen nun gleich die wichtigsten vielfachen Integrale betrachten, denn die Zahl derer, die sich ohne grosse Weitläufigkeiten entwickeln lassen, ist sehr gering.

Für $\varphi(x) = a^x$ hat man folgende Reihe von Gleichungen

$$\Sigma a^x = \frac{1}{a^h-1}a^x$$

$$\Sigma^{(2)}a^x = \frac{1}{a^h-1}\Sigma a^x = \frac{1}{(a^h-1)^2}a^x$$

Digitized by Google

$$\Sigma^{(3)}a^x = \frac{1}{(a^h-1)^2}\Sigma a^x = \frac{1}{(a^h-1)^3}a^x$$

woraus man sogleich das allgemeine Gesetz ersieht. Es ist nämlich

$$\Sigma^{(n)}a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^n}.$$

Da hier keine Rücksicht auf die willkürlichen Constanten genommen worden ist, so gehört zur Vervollständigung des vielfachen Integrales noch der in 2) verzeichnete Ausdruck; also hat man

$$3) \qquad \Sigma^{(n)}a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + C_0 + C_1x + \dots + C_{n-1}x^{n-1}.$$

Für $\varphi(x) = \sin x$ findet man leicht der Reihe nach

$$\Sigma \sin x = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)\cos(x-\tfrac{1}{2}h)$$
$$\Sigma^{(2)}\sin x = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)\,\Sigma\cos(x-\tfrac{1}{2}h) = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^2\sin(x-\tfrac{2}{2}h)$$
$$\Sigma^{(3)}\sin x = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^2\Sigma\sin(x-\tfrac{2}{2}h) = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^3\cos(x-\tfrac{3}{2}h)$$
$$\Sigma^{(4)}\sin x = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^3\Sigma\cos(x-\tfrac{3}{2}h) = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^4\sin(x-\tfrac{4}{2}h)$$

. . . .

und hier übersieht man ohne Mühe das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortgehen; es ist nämlich

$$4) \qquad \Sigma^{(n)}\sin x = (2 cosec \tfrac{1}{2}h)^n \sin\left(x - n\,\frac{\pi+h}{2}\right)$$

wobei ebenfalls der Ausdruck 2) zur Vervollständigung hinzuzusetzen ist.

Für $\varphi(x) = \cos x$ steht die Rechnung ganz ähnlich so:

$$\Sigma \cos x = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)\sin(x-\tfrac{1}{2}h)$$
$$\Sigma^{(2)}\cos x = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)\,\Sigma\sin(x-\tfrac{1}{2}h) = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^2\cos(x-\tfrac{2}{2}h)$$
$$\Sigma^{(3)}\cos x = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^2\Sigma\cos(x-\tfrac{2}{2}h) = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^3\sin(x-\tfrac{3}{2}h)$$
$$\Sigma^{(4)}\cos x = -(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^3\Sigma\sin(x-\tfrac{3}{2}h) = +(2 cosec \tfrac{1}{2}h)^4\cos(x-\tfrac{4}{2}h)$$

. . . .

und überhaupt folgt hieraus ohne Rücksicht auf willkürliche Constanten

$$5) \qquad \Sigma^{(n)}\cos x = (2 cosec \tfrac{1}{2}h)^n \cos\left(x - n\,\frac{\pi+h}{2}\right).$$

Die drei Spezialisirungen von $\varphi(x)$, welche wir so eben betrachtet haben, sind die einzigen, in welchen sich $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$ völlig independent angeben lässt. Man sieht zwar leicht ein, dass es möglich sein wird, auch für andere Werthe von $\varphi(x)$, z. B. $\varphi(x) = x^m$, $x^p \cos x$ etc. jenes

Digitized by Google

vielfache Integral zu entwickeln, indem man successiv $\Sigma\varphi(x)$, $\Sigma^{(2)}\varphi(x)$, $\Sigma^{(3)}\varphi(x)$ etc. berechnet, aber der Calcül selbst liefert so complizirte Ausdrücke, dass man das allgemeine Bildungsgesetz derselben nicht absehen kann.

§. 9.

Integration durch Potenzenreihen.

Befindet sich eine gegebene Funktion $\varphi(x)$ nicht unter der Zahl derer, von welchen wir die Summen bis jetzt kennen gelernt haben, so ist es nicht möglich, ihr endliches Integral in völlig entwickelter und geschlossener Form anzugeben, und man muss in diesem Falle wenigstens einen Ausdruck dafür aufzustellen suchen, welcher eine bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit gehende Annäherung an dasselbe erlaubt. Als nächstes Mittel zu diesem Zwecke bietet sich die Verwandlung der gesuchten Summe in eine unendliche convergirende Reihe dar, was sich auf verschiedene Weise ausführen lässt, je nachdem man der Reihe die eine oder andere Form auferlegt.

I. Der einfachste Fall ist der, in welchem $\varphi(x)$ den Bedingungen genügt, welche zur Anwendung des *Mac Laurin*'schen Satzes erforderlich sind *), so dass man $\varphi(x)$ in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortgehende Reihe verwandeln kann. Findet nun innerhalb zweier bestimmten Gränzen $x = \xi_1$ und $x = \xi_2$ die Gleichung

$$1)\qquad \varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \textit{ in inf.}$$

statt, so erhält man durch beiderseitige Integration sogleich

$$2)\qquad \Sigma\varphi(x) = a\frac{x}{h} + b\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x\right) + c\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}xh\right) + \dots$$

und diess gilt dann wieder zwischen den Gränzen $x = \xi_1$ und $x = \xi_2$. Man kann aber auch der Reihe erst eine andere Form geben, ehe

---

*) Ueber diese Bedingungen s. m. des Verf. Handbuch der Differenzialrechnung Cap. VIII.

Digitized by Google

man jedes einzelne Glied derselben integrirt. Wendet man nämlich die Gleichung

$$x^m = \overset{m}{J}_1 h^{m-1} x + \overset{m}{J}_2 h^{m-2} x(x-h) + \overset{m}{J}_3 h^{m-3} x(x-h)(x-2h) + \ldots$$
$$\ldots + \overset{m}{J}_m h^0 x(x-h)(x-2h) \ldots (x-\overline{m-1}h)$$

auf die einzelnen Glieder derselben an, so findet man

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$
$$= a + b\overset{1}{J}_1 x + c[\overset{2}{J}_1 hx + \overset{2}{J}_2 x(x-h)]$$
$$+ d[\overset{3}{J}_1 h^2 x + \overset{3}{J}_2 hx(x-h) + \overset{3}{J}_3 x(x-h)(x-2h)] + \ldots$$

d. i. wenn man ordnet

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$
$$= a + (b\overset{1}{J}_1 + c\overset{3}{J}_1 h + d\overset{4}{J}_1 h^2 + \ldots)x$$
$$+ (c\overset{2}{J}_2 + d\overset{3}{J}_2 h + e\overset{4}{J}_2 h^2 + \ldots)x(x-h)$$
$$+ (d\overset{3}{J}_3 + e\overset{4}{J}_3 h + f\overset{5}{J}_3 h^2 + \ldots)x(x-h)(x-2h)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hat man auf diese Weise $\varphi(x)$ aus der ursprünglichen Form in die folgende

$$\varphi(x) = a' + b'x + c'x(x-h)$$
$$+ d'x(x-h)(x-2h) + \ldots$$

gebracht, so giebt die beiderseitige endliche Integration

$$3) \quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h} a'x + \frac{1}{2h} b'x(x-h)$$
$$+ \frac{1}{3h} c'x(x-h)(x-2h) + \ldots$$

Die Coeffizienten a', b', c', ... sind hier (mit Ausnahme des ersten, der $= a$ ist) selbst unendliche Reihen, lassen sich aber summiren, sobald die numerischen Werthe von h und a, b, c, ... gegeben sind.

II. Wenn eine Funktion sich nicht in eine nach aufsteigenden Potenzen ihrer Variabelen fortschreitende Reihe entwickeln lässt, wie wie z. B. $l\left(1+\frac{1}{x}\right)$, so glückt es doch häufig, sie in eine nach absteigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortgehende Reihe zu verwandeln, so dass man in diesem Falle

Digitized by Google

$$4)\quad \varphi(x) = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \ldots.$$

setzen darf, wenigstens innerhalb gewisser für x geltender Gränzen. Eine solche Reihe lässt sich aber stets in eine andere von der Form

$$\varphi(x) = \alpha' + \frac{\beta'}{x} + \frac{\gamma'}{x(x+h)} + \frac{\delta'}{x(x+h)(x+2h)} + \ldots.$$

verwandeln, wovon man jedes einzelne Glied auf der rechten Seite, mit Ausnahme des ersten, leicht integriren kann. Es giebt nämlich für jedes $b > a$ folgende Formel *)

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{a}{b+1} + \frac{a(a+1)}{(b+1)(b+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \ldots.$$

und aus dieser folgt, wenn nach beiderseitiger Division mit b die Substitutionen $a = n$, $b = z + n$ vorgenommen werden

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+n} + \frac{n}{(z+n)(z+n+1)} + \frac{n(n+1)}{(z+n)(z+1)(z+n+2)} + \ldots.$$

Hier dividiren wir beiderseits mit $z(z+1)(z+2) \ldots. (z+n-1)$, was wir kurz mit $z_{(n)}$ bezeichnen wollen; es wird dann

$$5)\quad \frac{1}{z \,.\, z_{(n)}} = \frac{1}{z_{(n+1)}} + \frac{n}{z_{(n+2)}} + \frac{n(n+1)}{z_{(n+3)}} + \ldots.$$

für $z = 1$ hat man sehr einfach

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z_{(2)}} + \frac{1}{z_{(3)}} + \frac{2}{z_{(4)}} + \frac{6}{z_{(5)}} + \ldots.$$

und durch Division mit z,

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z\,.\,z_{(2)}} + \frac{1}{z\,.\,z_{(3)}} + \frac{2}{z\,.\,z_{(4)}} + \frac{6}{z\,.\,z_{(5)}} + \ldots.$$

und hier kann man auf der rechten Seite die Formel 5) auf jedes einzelne Glied anwenden, wodurch man Folgendes erhält:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z_{(3)}} + \frac{2}{z_{(4)}} + \frac{6}{z_{(5)}} + \frac{24}{z_{(6)}} + \ldots.\\ + \left\{\frac{1}{z_{(4)}} + \frac{3}{z_{(5)}} + \frac{12}{z_{(6)}} + \ldots.\right\}\\ + 2\left\{\frac{1}{z_{(5)}} + \frac{4}{z_{(6)}} + \ldots.\right\}\\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\end{aligned}$$

*) M. s. d. Verf. Handbuch der Differenzialrechnung S. 266 letzte Formel.

Digitized by Google

oder wenn man Alles vereinigt, was sich vereinigen lässt,

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z_{(3)}} + \frac{3}{z_{(4)}} + \frac{11}{z_{(5)}} + \frac{50}{z_{(6)}} + \dots$$

Dividirt man beiderseits wieder mit z, so kann man die Formel 5) von Neuem auf jedes einzelne Glied rechts anwenden und findet so

$$\frac{1}{z^4} = \frac{1}{z_{(4)}} + \frac{6}{z_{(5)}} + \frac{35}{z_{(6)}} + \frac{225}{z_{(7)}} + \dots$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt; hat man überhaupt

$$6)\quad \frac{1}{z^m} = \frac{\overset{m}{K}_0}{z_{(m)}} + \frac{\overset{m}{K}_1}{z_{(m+1)}} + \frac{\overset{m}{K}_2}{z_{(m+2)}} + \frac{\overset{m}{K}_3}{z_{(m+3)}} + \dots$$

so dividire man beiderseits mit z und zerlege rechts jedes Glied mit Hülfe der Formel 5); man findet dann sogleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{m+1}} = \overset{m}{K}_0 & \left\{ \frac{1}{z_{(m+1)}} + \frac{m}{z_{(m+2)}} + \frac{m(m+1)}{z_{(m+3)}} + \dots \right\} \\ & + \overset{m}{K}_1 \left\{ \frac{1}{z_{(m+2)}} + \frac{m+1}{z_{(m+3)}} + \dots \right\} \\ & + \overset{m}{K}_2 \left\{ \frac{1}{z_{(m+3)}} + \dots \right\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

oder durch Vereinigung der Glieder mit denselben Fakultäten

$$\frac{1}{z^{m+1}} = \frac{\overset{m+1}{K}_0}{z_{(m+1)}} + \frac{\overset{m+1}{K}_1}{z_{(m+2)}} + \frac{\overset{m+1}{K}_2}{z_{(m+3)}} + \dots$$

hierbei ist

$$\begin{aligned} \overset{m+1}{K}_0 &= \overset{m}{K}_0 \\ \overset{m+1}{K}_1 &= m\overset{m}{K}_0 + \overset{m}{K}_1 \\ \overset{m+1}{K}_2 &= m(m+1)\overset{m}{K}_0 + (m+1)\overset{m}{K}_1 + \overset{m}{K}_2 \\ \overset{m+1}{K}_3 &= m(m+1)(m+2)\overset{m}{K}_0 + (m+1)(m+2)\overset{m}{K}_1 + (m+2)\overset{m}{K}_2 + \overset{m}{K}_3 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Man kann dafür auch schreiben

$$\begin{aligned} \overset{m+1}{K}_0 &= \overset{m}{K}_0 \\ \overset{m+1}{K}_1 &= m\overset{m+1}{K}_0 + \overset{m}{K}_1 \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\overset{m+1}{K_2} = (m+1)\overset{m+1}{K_1} + \overset{m}{K_2}$$

$$\overset{m+1}{K_3} = (m+2)\overset{m+1}{K_2} + \overset{m}{K_3}$$

etc.

überhaupt wenn p eine ganze positive Zahl bedeutet

$$7)\quad \overset{m+1}{K_{p+1}} = (m+p)\overset{m+1}{K_p} + \overset{m}{K_{p+1}}.$$

Da für $m = 2$ die Coefficienten schon bekannt sind, nämlich

$$\overset{2}{K_0} = 1,\ \overset{2}{K_1} = 1,\ \overset{2}{K_2} = 1.2,\ \overset{2}{K_3} = 1.2.3,\ \ldots.$$

und ausserdem $\overset{3}{K_0} = \overset{2}{K_0} = 1$ ist, so giebt die Formel 7) nach einander die Coefficienten

$$\overset{3}{K_1},\ \overset{3}{K_2},\ \overset{3}{K_3},\ \overset{3}{K_4},\ \ldots.$$

daraus leitet man dann für $m = 3$ und mittelst der Bemerkung, dass $\overset{4}{K_0} = \overset{3}{K_0} = 1$ ist, die Coefficienten

$$\overset{4}{K_1},\ \overset{4}{K_2},\ \overset{4}{K_3},\ \overset{4}{K_4},\ \ldots.$$

auf dieselbe Weise ab u. s. w. Diess giebt folgende Tabelle

$m =$	2	3	4	5	6	7
$K_0 =$	1	1	1	1	1	1
$K_1 =$	1	3	6	10	15	21
$K_2 =$	2	11	35	85	175	322
$K_3 =$	6	50	225	735	1960	4536
$K_4 =$	24	274	1624	6769	22449	. . .
$K_5 =$	120	1764	13132	67284	. . .	. . .
$K_6 =$	720	13068	105056	. . .	. . .	. . .
$K_7 =$	5040	109584	. . .	. . .	. . .	. . .
$K_8 =$	40320	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Die hier verzeichneten Coefficienten stehen übrigens in einer nahen Beziehung zu den sogenannten Fakultätencoefficienten, d. h. zu den Constanten der Gleichung

$$u(u+1)(u+2)\ldots(u+q-1) = \overset{q}{C_1}u + \overset{q}{C_2}u^2 + \ldots + \overset{q}{C_q}u^q.$$

Multiplizirt man nämlich mit $u + q$ beiderseits, so ist

Digitized by Google

$$u(u+1)(u+2) \dots (u+q) = q\overset{q}{C}_1 u + (q\overset{q}{C}_2 + \overset{q}{C}_1)u^2$$
$$+ (q\overset{q}{C}_3 + \overset{q}{C}_2)u^3 + \dots$$

und wenn man diess mit dem vergleicht, was aus der ursprünglichen Gleichung wird, sobald man $q+1$ an die Stelle von q treten lässt, so findet man leicht, dass für jedes ganze positive n die Relation

$$\overset{q+1}{C}_n = q\overset{q}{C}_n + \overset{q}{C}_{n-1}$$

statt findet. Setzt man in einer neuen Bezeichnung

$$\overset{q}{C}_n = \overset{n+1}{H}_{q-n}$$

so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\overset{n+1}{H}_{q-n+1} = q\overset{n+1}{H}_{q-n} + \overset{n}{H}_{n-q+1}$$

aus welcher man durch die Substitution $q = n + p$ und Vergleichung mit 7) die Identität von H und K erkennt. Die nunmehrige Bezeichnung

$$\overset{q}{C}_n = \overset{n+1}{K}_{q-n}$$

giebt z. B. für $q = 3$, $n = 1, 2, 3$, der Reihe nach $\overset{3}{C}_1 = \overset{2}{K}_2$, $\overset{3}{C}_2 = \overset{3}{K}_1$, $\overset{3}{C}_3 = \overset{4}{K}_0$ und durch Vergleichung mit der Tabelle ersieht man hieraus, dass die letztere nichts Anderes enthält als die Fakultätenkoeffizienten in diagonaler Stellung.

Man substituire nun in die Gleichung 6) $\frac{x}{h}$ für x, so erhält man vermöge der Bedeutung von $x_{(m)}$, $x_{(m+1)}$ etc. nach beiderseitiger Division mit h^m

$$8)\quad \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{m-1}h)} + \frac{\overset{m}{K}_1 h}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+mh)}$$
$$+ \frac{\overset{m}{K}_2 h^2}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{m+1}h)} + \dots$$

wo es nun leicht ist, jedes Glied auf der rechten Seite zu integriren, sobald m die Einheit übersteigt. Man gelangt so zu der Formel

$$9)\quad \Sigma\frac{1}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)h}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{m-2}h)}$$
$$-\frac{1}{m}\,\frac{\overset{m}{K}_1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{m-1}h)}$$

Digitized by Google

$$-\frac{1}{m+1}\;\frac{\overset{m}{K_2}h}{x(x+h)(x+2h)\;...\;(x+mh)}$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Handelt es sich überhaupt allgemeiner um die endliche Integration einer Reihe von der unter No. 4) angegebenen Form, so verwandele man zunächst jedes einzelne Glied derselben nach Formel 8) in eine unendliche Reihe; man erhält dann ohne Schwierigkeit:

$$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \frac{\varepsilon}{x^4} + \;....$$

$$= \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x(x+h)} + \frac{\gamma h + \delta}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$+ \frac{2\gamma h^2 + 3\delta h + \varepsilon}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}$$

$$+ \frac{6\gamma h^3 + 11\delta h^2 + 6\varepsilon h + \zeta}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)(x+4h)} + \;....$$

und nun giebt die beiderseitige endliche Integration

$$10)\quad \Sigma\varphi(x) = \frac{\alpha}{h}x + \beta\Sigma\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\,\frac{\gamma}{x} - \frac{1}{2h}\,\frac{\gamma h + \delta}{x(x+h)}$$

$$- \frac{1}{3h}\,\frac{2\gamma h^2 + 3\delta h + \varepsilon}{x(x+h)(x+2h)}$$

$$- \frac{1}{4h}\,\frac{6\gamma h^3 + 11\delta h^2 + 6\varepsilon h + \zeta}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)} - \;....$$

und mittelst dieser Formel ist das Integral auf $\Sigma\frac{1}{x}$ zurückgeführt.

Nach der vorhin gemachten Bemerkung über den Zusammenhang der mit K bezeichneten Zahlen und der Fakultätenkoeffizienten kann man jetzt leicht das allgemeine Glied unserer Reihe angeben. Dasselbe ist nämlich

$$-\frac{1}{nh}\;\frac{\overset{n}{C_1}\gamma h^{n-1} + \overset{n}{C_2}\delta h^{n-2} + \overset{n}{C_3}\varepsilon h^{n-3} + \;....}{x(x+h)(x+2h)\;...\;(x+\overline{n-1}h)}$$

und somit die Aufgabe in aller Vollständigkeit gelöst.

Digitized by Google

§. 10.

Integration durch goniometrische Reihen.

Man kann mit Hülfe der Integralrechnung sehr leicht nachweisen, dass jede Funktion $\varphi(x)$ sich in Reihen verwandeln lässt, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen von x fortschreiten, dass man also ebensowohl

1) $$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots.$$

als auch

2) $$\varphi(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots.$$

setzen darf. Die erste Gleichung gilt für $\pi \geqq x \geqq 0$ und in ihr ist

3) $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \cos nx\, dx;$$

die zweite dagegen besteht nur für $\pi > x > 0$ und in ihr werden die Coeffizienten mittelst der Formel

4) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\, dx$$

bestimmt *). Aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man nun sogleich durch beiderseitige endliche Integration

---

*) Wenn erst die Möglichkeit einer Reihenverwandlung nach den Schematen 1) oder 2) nachgewiesen ist und die Gränzen bestimmt sind, innerhalb welcher diese Verwandlung gilt, so hat die Ermittelung der Werthe von a_n und b_n keine Schwierigkeit. Multiplizirt man nämlich die erste Gleichung mit $2\cos nx$ und zerlegt rechts jedes doppelte Cosinusprodukt in eine Cosinussumme, so ist

$$\begin{aligned}2\varphi(x)\cos nx = a_0 \cos nx &+ a_1[\cos(n-1)x + \cos(n+1)x]\\ &+ a_2[\cos(n-2)x + \cos(n+2)x]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ a_{n-1}[\cos x + \cos(2n-1)x]\\ &+ a_n[1 + \cos 2nx]\\ &+ a_{n+1}[\cos x + \cos(2n+1)x]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Bemerkt man, dass überhaupt für jedes ganze positive von Null verschiedene m

$$\int_0^\pi \cos mx\, dx = 0$$

Digitized by Google

$$5)\quad \Sigma\varphi(x) = \tfrac{1}{2}a_0\frac{x}{h} + a_1\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + a_2\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h}$$
$$+ a_3\frac{\sin 3(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{3}{2}h} + \ldots.$$

und

$$6)\quad \Sigma\varphi(x) = -b_1\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - b_2\frac{\cos 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h}$$
$$- b_3\frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{3}{2}h} - \ldots.$$

und man kann also das gesuchte endliche Integral immer auf diese Weise entwickeln, wenn im ersten Falle x die Gränzen 0 und π nicht überschreitet, und im zweiten innerhalb derselben bleibt. Man hat übrigens nicht immer nöthig, die Coeffizienten a_n und b_n mittelst der Formeln 3) und 4) zu bestimmen, denn sehr häufig gelangt man dadurch zu Gleichungen von den Formen 1) und 2), dass man in einer nach aufsteigenden Potenzen einer Variabelen z fortgehenden Reihe die Substitution $z = r(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$ vornimmt und darauf die reellen und imaginären Partieen beiderseits vergleicht.

Setzt man z. B. in der für ächt gebrochene z geltenden Gleichung

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots.$$

$z = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ und berücksichtigt, dass hierdurch

$$1 + z = 2\cos\tfrac{1}{2}x(\cos\tfrac{1}{2}x + \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{2}x)$$
$$= (2\cos\tfrac{1}{2}x)e^{\frac{1}{2}x\sqrt{-1}}$$

mithin

$$l(1+z) = l(2\cos\tfrac{1}{2}x) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{-1}$$

wird, so ist jetzt

$$l(2\cos\tfrac{1}{2}x) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{-1}$$

---

ist, so führt die Multiplikation der vorigen Gleichung mit dx und Integration zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ zu dem einfachen Resultate

$$2\int_0^\pi \varphi(x)\cos nx\,dx = a_n\int_0^\pi 1\,.\,dx = a_n\pi$$

woraus die Formel 2) sogleich folgt. Auf ähnliche Weise gelangt man zur Bestimmung von b_n. Genauere Untersuchungen über diese interessanten Reihen geben des Verf. „Analytische Studien, zweite Abtheilung."

Digitized by Google

$$= (\cos x + \sqrt{-1}\sin x) - \tfrac{1}{2}(\cos 2x + \sqrt{-1}\sin 2x) + \ldots.$$

und mithin durch Vergleichung der reellen und imaginären Bestandtheile:

6) $l(2\cos\tfrac{1}{2}x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x - \ldots.$

7) $\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots.$

und von diesen Gleichungen gilt nach den gemachten Bemerkungen die erste für $\pi \geqq x \geqq 0$, die zweite für $\pi > x > 0$. Schreibt man in der ersten $2x$ für x, so ist unter der Bedingung $\pi \geqq 2x \geqq 0$, d. h. $\tfrac{1}{2}\pi \geqq x \geqq 0$,

8) $l\cos x = -l2 + \cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{6}\cos 6x - \ldots.$

und hieraus erhält man sogleich durch endliche Integration

9) $$\Sigma l\cos x = -l2.\frac{x}{h} + \frac{\sin(2x-h)}{2\sin h} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2(2x-h)}{2\sin 2h} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3(2x-h)}{2\sin 3h} - \ldots.$$

Setzt man in 8) $\tfrac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von x, so wird

10) $l\sin x = -l2 - \cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x - \tfrac{1}{3}\cos 6x - \ldots.$

wobei die Bedingung $\tfrac{1}{2}\pi \geqq \tfrac{1}{2}\pi - x \geqq 0$, d. h. $\tfrac{1}{2}\pi \geqq x \geqq 0$ erfüllt sein muss. Man findet jetzt

11) $$\Sigma l\sin x = -l2\frac{x}{h} - \frac{\sin(2x-h)}{2\sin h} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2(2x-h)}{2\sin 2h} - \frac{1}{3}\frac{\sin 3(2x-h)}{2\sin 3h} - \ldots.$$

Die Differenz der Gleichungen 9) und 11) ist

12) $$\Sigma l\cot x = \frac{\sin(2x-h)}{\sin h} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3(2x-h)}{\sin 3h} + \frac{1}{5}\frac{\sin 5(2x-h)}{\sin 5h} + \ldots.$$

und dieselbe Reihe mit negativen Vorzeichen giebt $\Sigma l\tan x$.

Ein zweites Beispiel für diese Integrationsmethode möge die Funktion $\frac{1}{x}$ liefern, welche in die Reihe 2) verwandelt werden möge. Es ist dann

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{x}\,dx$$

oder wenn man $\sin nx$ in die bekannte Reihe entwickelt und jedes einzelne Glied integrirt

Digitized by Google

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1}\frac{n\pi}{1} - \frac{1}{3}\frac{(n\pi)^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{(n\pi)^5}{1.2\ldots5} - \ldots\right]$$

Bezeichnet man, wie es in neuerer Zeit gewöhnlich geworden ist, die transscendente Funktion

$$\int_0^u \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{1}{1}\frac{u}{1} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{u^5}{1.2\ldots3} - \ldots$$

mit $Si(u)$ [Integralsinus von u], so hat man sehr einfach

$$b_n = \frac{2}{\pi} Si(n\pi)$$

und jetzt ergiebt sich leicht für $\pi > x > 0$

$$13)\quad \frac{\pi}{2}\frac{1}{x} = Si(\pi)\sin x + Si(2\pi)\sin 2x + Si(3\pi)\sin 3x + \ldots$$

und mithin durch Integration

$$14)\quad \frac{\pi}{2}\Sigma\frac{1}{x} = - Si(\pi)\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - Si(2\pi)\frac{\cos 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h}$$
$$- Si(3\pi)\frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{3}{2}h} - \ldots$$

wonach sich, sobald die hinzuzufügende willkürliche Constante einen bestimmten Werth erhält, $\Sigma\frac{1}{x}$ leicht berechnen lassen würde.

Wählt man die Funktion $\varphi(x)$ so, dass sich ihr endliches Integral unmittelbar angeben lässt, so gelangt man durch Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate zu einer neuen der Theorie der Reihen angehörigen Formel. So ist z. B. für $\pi > x > 0$ nach 7)

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots$$

wobei man die zweite Formel aus der ersten erhält, wenn man $\pi - x$ an die Stelle von x treten lässt. Die halbe Summe dieser Gleichungen ist

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{1}\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$
$$\pi > x > 0.$$

Unter Zusatz einer willkürlichen Constante giebt hier die beiderseitige endliche Integration

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{4}\pi\frac{x}{h} + C = -\frac{1}{1}\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} - \frac{1}{3}\frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{3}{2}h} - \dots$$

Um die Constante zu bestimmen nehmen wir für x einen solchen Werth, dass die Summe der rechts stehenden Reihe unmittelbar bekannt ist. Hierzu empfiehlt sich die Spezialisirung $x = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}h$; es ist dann unter der Bedingung

$$\pi > \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}h > 0 \text{ d. i. } \pi > h > -\pi$$

$$\frac{\pi}{4h}(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}h) + C = 0$$

und wenn man die vorige Gleichung von dieser abzieht, so ist der doppelte Rest

$$\frac{\pi}{2h}(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}h - x)$$

$$= \frac{1}{1.}\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h} + \frac{1}{3}\frac{\cos 3(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{3}{2}h} + \frac{1}{5}\frac{\cos 5(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{5}{2}h} + \dots$$

und diese Gleichung gilt nur unter der doppelten Bedingung

$$\pi > x > 0, \quad \pi > h > -\pi.$$

Nimmt man $x = u + v$, $h = 2v$, so wird eleganter

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4v}(\tfrac{1}{2}\pi - u) = \dfrac{1}{1}\dfrac{\cos u}{\sin v} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos 3u}{\sin 3v} + \dfrac{1}{5}\dfrac{\cos 5u}{\sin 5v} + \dots \\ \qquad \pi > u + v > 0, \quad \tfrac{1}{2}\pi > v > -\tfrac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Für $u = 0$, $u = v$ erhält man hieraus die Spezialisirungen

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8v} = \tfrac{1}{1}\operatorname{cosec} v + \tfrac{1}{3}\operatorname{cosec} 3v + \tfrac{1}{5}\operatorname{cosec} 5v + \dots \\ \qquad \tfrac{1}{2}\pi > v > 0 \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{v} - 1\right) = \tfrac{1}{1}\cot v + \tfrac{1}{3}\cot 3v + \tfrac{1}{5}\cot 5v + \dots \\ \qquad \tfrac{1}{2}\pi > v > 0. \end{cases}$$

Eine etwas verwickeltere Ausführung desselben Gedankens ist die folgende. Mittelst der Formeln 1) und 3) findet man leicht die Gleichung

$$18)\quad \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{rx}+e^{-rx}}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}} = \frac{1}{2r} - \frac{r\cos x}{r^2+1^2} + \frac{r\cos 2x}{r^2+2^2} - \dots$$

worin r eine constante Grösse und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hier giebt die beiderseitige endliche Integration

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\left\{\frac{e^{rx}}{e^{rh}-1}+\frac{e^{-rx}}{e^{-rh}-1}\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2r}\frac{x}{h}-\frac{r}{r^2+1^2}\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}+\frac{r}{r^2+2^2}\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{2}{2}h}-\ldots.$$

wofür man besser schreiben kann

$$19)\quad \frac{\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\cdot\frac{e^{r(x-\frac{1}{2}h)}-e^{-r(x-\frac{1}{2}h)}}{e^{\frac{1}{2}rh}-e^{-\frac{1}{2}rh}}+C$$

$$=\frac{x}{rh}-\frac{r}{r^2+1^2}\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}+\frac{r}{r^2+2^2}\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h}{\sin\frac{2}{2}h}-\ldots..$$

Die Gränzen für die Gültigkeit dieser Gleichung sind leicht zu bestimmen. Die Formel 18) gilt nämlich von $x=0$ bis $x=\pi$, da aber die linke und rechte Seite derselben gleichzeitig die Eigenschaft $\varphi(-x)=\varphi(x)$ besitzen, so gilt die Formel weiter noch von $x=0$ *bis* $x=-\pi$, also unter der Bedingung $\pi \geqq x \geqq -\pi$. Dies ist nun zugleich die Bedingung für das Bestehen der Gleichung 19). Um in ihr die Constante C zu bestimmen, setzen wir $x=\frac{1}{2}h$, es wird dann

$$C=\frac{1}{rh}\,\frac{1}{2}h$$

und wenn wir diese Gleichung von ihrer Vorgängerin abziehen, so bleibt

$$\frac{\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\,\frac{e^{r(x-\frac{1}{2}h)}-e^{-r(x-\frac{1}{2}h)}}{e^{\frac{1}{2}rh}-e^{-\frac{1}{2}rh}}$$

$$=\frac{1}{rh}(x-\tfrac{1}{2}h)-\frac{r}{r^2+1^2}\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{1}{2}h}$$

$$+\frac{r}{r^2+2^2}\frac{\sin 2(x-\frac{1}{2}h)}{\sin\frac{2}{2}h}-\ldots\ldots$$

$$\pi \geqq x \geqq -\pi,\ \pi \geqq \tfrac{1}{2}h \geqq -\pi.$$

Für $x=u+v$, $h=2v$ wird hieraus

$$20)\quad \frac{\pi}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\,\frac{e^{ru}-e^{-ru}}{e^{rv}-e^{-rv}}$$

$$=\frac{1}{2r}\frac{u}{v}-\frac{r}{r^2+1^2}\frac{\sin u}{\sin v}+\frac{r}{r^2+2^2}\frac{\sin 2u}{\sin 2v}-\frac{r}{r^2+3^2}\frac{\sin 3u}{\sin 3v}$$

$$+\ldots\ldots$$

$$\pi \geqq u+v \geqq -\pi,\ \pi \geqq v \geqq -\pi$$

wovon sich leicht wieder Specialisirungen ableiten lassen.

Digitized by Google

§. 11.

Integration durch halbconvergente Reihen.

Bei weitem das ausgezeichnetste Mittel zur Ausführung endlicher Integrationen bieten die Formeln dar, welche wir im §. 12. der Differenzenrechnung entwickelt haben und es bedarf kaum mehr als einer etwas anderen Schreibweise, um sie sogleich zu dem angedeuteten Zwecke benutzen zu können. So ist zunächst für $1 > \lambda > 0$

$$hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\,\Delta f'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\,\Delta f''(x) - \frac{B_3\,h^4}{1.2.3.4}\,\Delta f^{IV}(x) + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\dots(2n-2)}\,\Delta f^{(2n-2)}(x) + \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n)}\,f^{(2n+1)}(x+\lambda h)$$

und diese Formel gilt für jede Function $f(t)$, wenn diese selbst und die von ihr vorkommenden Differenzialquotienten innerhalb des Intervalles $t = x$ bis $t = x + h$ stetig und endlich bleiben. Setzen wir nun $\Delta f(x) = \psi(x)$, so ist

$$f(x) = \Sigma\psi(x),\ f'(x) = \frac{d\Sigma\psi(x)}{dx} = \Sigma\frac{d\psi(x)}{dx} = \Sigma\psi'(x)\ ^{*})$$

ferner folgt durch Differenziation von $\Delta f(x) = \psi(x)$,

$$\Delta f'(x) = \psi'(x),\ \Delta f''(x) = \psi''(x),\ \text{etc.}$$

und mithin geht die obige Formel in die folgende über

$$h\Sigma\psi'(x) + C = \psi(x) - \tfrac{1}{2}h\psi'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\psi''(x) - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\psi^{IV}(x) + \dots$$

---

*) Wenn nämlich $f(x) = \Sigma\psi(x)$ ist, so hat man

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \frac{\Sigma\psi(x+\delta)-\Sigma\psi(x)}{\delta} = \frac{\Sigma[\psi(x+\delta)-\psi(x)]}{\delta}$$
$$= \Sigma\left[\frac{\psi(x+\delta)-\psi(x)}{\delta}\right]$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende δ

$$f'(x) = \Sigma\psi'(x)$$

was mit der obigen Behauptung übereinstimmt.

Digitized by Google

$$\ldots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)} \psi^{(2n-2)}(x)$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)} \Sigma\psi^{(2n+1)}(x+\lambda h).$$

Nehmen wir endlich $\psi'(x) = \varphi(x)$, so wird

$$\psi(x) = \int \varphi(x)dx$$

ferner $\psi''(x) = \varphi'(x)$, $\psi'''(x) = \varphi''(x)$ etc. und so gelangen wir zu der Summenformel

$$1)\ h\Sigma\varphi(x) + C = \int \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h\varphi(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2} \varphi'(x)$$
$$- \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} \varphi'''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2} \varphi^{(2n-3)}(x)$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)} \Sigma\varphi^{(2n)}(x+\lambda h).$$

Will man die Unbestimmtheit, welche in der willkührlichen Constante liegt, wegschaffen, so braucht man nur dem x irgend zwei specielle Werthe etwa $x = a$ und $x = b$ zu ertheilen und von den beiden so entstehenden Gleichungen die Differenz zu nehmen. Um diese Differenz kurz ausdrücken zu können, erinnern wir zunächst an die Weise, wie man das bestimmte Integral aus dem unbestimmten Integrale ableiten kann. Findet nämlich eine Gleichung von der Form

$$\int \varphi(x)dx = \Phi(x) + Const.$$

statt und sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig, so hat bekanntlich die Differenz $\Phi(b) - \Phi(a)$ einen bestimmten und unzweideutigen Werth und man kann unter diesen Voraussetzungen die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

als Definition des (unendlichen) bestimmten Integrales ansehen. Eine ganz analoge Bezeichnung wollen wir für das endliche bestimmte Integral oder die bestimmte Summe einführen, indem wir, wenn

Digitized by Google

$$\Sigma\varphi(x) = f(x)$$

ist, die Gleichung

$$2) \quad \sum_a^b \varphi(x) = f(b) - f(a)$$

aufstellen, worin die rechte Seite die Definition des auf der linken Seite stehenden Symboles enthält. Nach diesen Bemerkungen folgt aus Nr. 1)

$$3) \quad h\sum_a^b \varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b)-\varphi(a)] + \frac{B_1 h^2}{1.2}[\varphi'(b) - \varphi'(a)] - \ldots.$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\left[\varphi^{(2n-3)}(b) - \varphi^{(2n-3)}(a)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)} \sum_a^b \varphi^{(2n)}(x + \lambda h).$$

In dem Falle wo die Differenz h von x ein aliquoter Theil von $b - a$ ist, lässt sich dieser Ausdruck noch etwas vereinfachen. Bezeichnen wir nämlich mit m eine ganze positive Zahl und ist $\frac{b-a}{m} = h$ also $b = a + mh$, so folgt aus Formel 3) in § 1

$$f(b) - f(a) = \varphi(a) + \varphi(a + h) + \varphi(a + 2h) + \ldots + \varphi(a + \overline{m-1}h)$$

d. i. gemäss der in Nr. 2) aufgestellten Bezeichnungsweise

$$4) \quad \sum_a^b \varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(a + h) + \varphi(a + 2h) + \ldots + \varphi(a + \overline{m-1}h).$$

Substituiren wir für jedes Glied rechts das Maximum, welches die Funktion $\varphi(x)$ während des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ annimmt, und nennen M dieses Maximum, so ist offenbar

$$\sum_a^b \varphi(x) < mM \text{ d. i. } \sum_a^b \varphi(x) < \frac{b-a}{a} M.$$

Nennen wir ebenso M_{2n} das numerische Maximum, welches $\varphi^{(2n)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ erreicht, so gilt ganz ähnlich die Gleichung

$$\sum_a^b \varphi^{(2n)}(x + \lambda h) < \frac{b-a}{h} M_{2n}$$

und man kann demnach, mit x einen ächten Bruch bezeichnend,

$$\sum_a^b \varphi^{(2n)}(x + \lambda h) = \varkappa \frac{b-a}{h} M_{2n}$$

setzen. Nach diesen Erörterungen nimmt die Formel 3) die folgende Gestalt an

Digitized by Google

$$5)\ h \sum_a^b \varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[\varphi'(b) - \varphi'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\right] + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}\left[\varphi^{(2n-3)}(b) - \varphi^{(2n-3)}(a)\right] \pm$$

$$\frac{\varkappa B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\ (b-a)M_{2n}.$$

Man kann leicht zu ähnlichen Formeln gelangen, welche nur durch die Ausdrncksweise des Restes differiren, sobald man ganz dieselben Substitutionen mit den übrigen Formeln des § 12. vornimmt. Aus der Gleichung

$$hf'(x) = \Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\ \Delta f''(x)$$

$$- \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\ \Delta f^{IV}(x) + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{(-1^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2.\ldots(2n-2)}\ \Delta f^{(2n-2)}(x)$$

$$+ (-1)^{n+1}\lambda\ \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}\ \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\ \Delta f^{(2n)}(x)$$

worin $1 > \lambda > 0$ und $f(t)$ eine Funktion ist, welche nebst ihren $(2n+1)$ ersten Differenzialquotienten innerhalb des Intervalles $t = x$ bis $t = x + h$ endlich und stetig und von welcher der $(2n+1)$te Differentialquotient innerhalb der Gränzen sein Vorzeichen nicht ändert, leitet man so unmittelbar die folgende ab

$$6)\ h\sum_a^b \varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[\varphi'(b) - \varphi'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\right] + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}\left[\varphi^{(2n-3)}(b) - \varphi^{(2n-3)}(a)\right]$$

$$+ (-1)^{n+1}\lambda\ \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}\ \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2..(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

und diese Formel besteht nur so lange als $f^{(2n+1)}(t)$ d. h.

$$\sum_a^b \varphi^{(2n)}(t)$$

innerhalb der Gränzen $t = a$ bis $t = b$ sein Vorzeichen nicht ändert und die Funktionen $\varphi(t)$, $\varphi'(t) \ldots \varphi^{(2n)}(t)$ während desselben Intervalles endlich und stetig bleiben. Wenn $b - a$ ein Vielfaches von h ist, so hat man

$$\sum_a^b \varphi^{(2n)}(t) = \varphi^{(2n)}(a) + \varphi^{(2n)}(a+h) + \varphi^{(2n)}(a+2h) + \ldots\ldots + \varphi^{(2n)}(b-h)$$

und mithin findet die erste jener Bedingungen statt, wenn $\varphi^{(2n)}(t)$ selbst von $t = a$ bis $t = b$ immer dasselbe Vorzeichen behält. Fügt man zur rechten Seite der Gleichung 6) noch den Ausdruck

$$0 = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} \left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right] - \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} \left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

so ergiebt sich unter denselben Bedingungen wie vorhin

$$7)\ h\sum_a^b \varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b) - \varphi(a)]$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[\varphi'(b) - \varphi'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{n+1} B_{2n-1} h^{2n}}{1.2..(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$
$$+ (-1)^{n+1}\left\{\lambda\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} - 1\right\}\frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

woraus man erkennt, dass der absolute Werth des Restes weniger beträgt, als das zuletzt in Rechnung gebrachte Glied der Reihe.

Endlich kann man aus den Formeln 12) und 13) des §. 13. noch die folgenden Resultate ableiten. Wenn die beiden Summen

$$8)\ \sum_a^b \varphi^{(2n)}(t) \text{ und } \sum_a^b \varphi^{(2n+2)}(t)$$

innerhalb des Intervalles a bis b ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht ändern, so ist in dem Falle, wo beide gleiche Vorzeichen haben:

$$9)\ h\sum_a^b \varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b) - \varphi(a)]$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[\varphi'(b) - \varphi'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\right] + \ldots$$

Digitized by Google

$$\ldots + \frac{(-1)^n B_{2n-3} h^{2n-2}}{1.2\ldots.(2n-2)}\left[\varphi^{(2n-3)}(b) - \varphi^{(2n-3)}(a)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}\lambda B_{2n-1} h^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

und in dem Falle, wo jene Vorzeichen einander entgegengesetzt sind

$$10)\quad h\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}}\varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b) - \varphi(a)]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left[\varphi'(b) - \varphi'(a)\right] - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\right] + \ldots$$

$$\ldots. + \frac{(-1)^n B_{2n-1} h_{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}\lambda(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\left[\varphi^{(2n-1)}(b) - \varphi^{(2n-1)}(a)\right]$$

hierbei bezeichnet λ immer eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse.

§. 12.

Beispiele zu den Theoremen des vorigen Paragraphen.

I. Eine der einfachsten Substitutionen, welche man in den Formeln des vorigen Paragraphen treffen kann, ist $\varphi(x) = x^\mu$, wo μ eine wesentlich positive Grösse bedeuten möge. Die Formel 1) giebt dann unter Anwendung der bekannten Bezeichnungsweise der Binomialkoeffizienten

$$h\Sigma(x^\mu) + C = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} - \tfrac{1}{2}hx^\mu + \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 h^2 x^{\mu-1} - \tfrac{1}{4}\mu_3 B_3 h^4 . x^{\mu-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n-2}\,\mu_{2n-3} B_{2n-3} h^{2n-2} x^{\mu-2n+3} +$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\,\mu_{2n-1} B_{2n-1} h^{2n+1}\Sigma(x+\lambda h)^{\mu-2n}.$$

Nehmen wir spezieller μ als ganze positive Zahl an und setzen, was offenbar erlaubt ist $2n > \mu$, so wird das letzte Glied (der Rest der Reihe) gleich Null und man braucht in diesem Falle die Reihe nur soweit fortzusetzen bis sie von selbst abbricht. Man hat dann

$$h\Sigma(x^\mu) + C = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} - \tfrac{1}{2}hx^\mu$$

$$+ \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 h^2 x^{\mu-1} - \tfrac{1}{4}\mu_3 B_3 h^4 x^{\mu-4} + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

was mit der induktorisch gefundenen Formel 2) in § 4. übereinstimmt. Setzt man einfach $h = 1$ und subtrahirt dasjenige von einander, was für $x = 0$ und $x = b$ aus dieser Gleichung hervorgeht, so wird weiter

$$\sum_0^b x^\mu = \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1} - \tfrac{1}{2} b x^\mu$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 h^2 b^{\mu-1} - \tfrac{1}{2}\mu_3 B_3 h^4 b^{\mu-3} + \ldots\ldots$$

und wenn b ein Vielfaches von h d. h. eine ganze positive Zahl ist, so kann man die linke Seite nach Formel 4) im vorigen Paragraphen entwickeln; dieselbe ist

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots\ldots + (m-1)^\mu$$

auf der rechten Seite dagegen würde man $b = 0 + mh = mh$ zu setzen haben. Schreibt man endlich p für m und addirt beiderseits p^μ, so erhält dann die vielfach gebrauchte Formel

$$1)\quad 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots\ldots + p^\mu$$
$$= \frac{p^{\mu+1}}{\mu+1} + \tfrac{1}{2}p^\mu$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 p^{\mu-1} - \tfrac{1}{4}\mu_3 B^3 p^{\mu-3} + \tfrac{1}{6}\mu_5 B_5 p^{\mu-5} - \ldots\ldots$$

II. Es sei ferner $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ so ist unter der Voraussetzung, dass $\sum_a^b \varphi^{(2n)}(t) = 1.2..(2n) \sum_a^b \frac{1}{t^{2n+1}}$ innerhalb des Intervalles $t = a$ bis $t = b$ continuirlich und endlich bleibt nach Formel (7) des vorigen Paragraphen

$$h\sum_a^b \frac{1}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right) - \tfrac{1}{2}h\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$
$$- \tfrac{1}{2}B_1 h^2\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right] + \tfrac{1}{4}B_3 h^4\left[\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4}\right] - \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} h^{2n}\left[\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{a^{2n}}\right] + \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} h^{2n} \varrho \left[\frac{1}{b^{2n}} - \frac{1}{a^{2n}}\right]$$

wobei der ächt gebrochene Ausdruck

$$\lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} - 1 = \varrho$$

gesetzt worden ist. Von dieser allgemeinen Formel ist ein Fall von speciellem Interesse, nämlich wenn $a = 1$ und $h = 1$. Dann macht

Digitized by Google

nämlich $b - a$ immer ein Vielfaches von h aus, sobald b eine positive ganze Zahl bedeutet; dieselbe ist $b = a + mh = 1 + m$; ferner wird jetzt

$$\sum_a^b \frac{1}{x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$\sum_a^b \frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{1}{1^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots + \frac{1}{m^{2n+1}}$$

woraus man erkennt, dass die Formel 1) in diesem Falle für jedes beliebige positive $b = m + 1$ in Anspruch genommen werden darf. Man hat nun

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$= l(m+1) - \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{1}\right] - \tfrac{1}{2}B_1\left[\frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{1^2}\right] + \dots\dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\left[\frac{1}{(m+1)^{2n}} - \frac{1}{1^{2n}}\right] + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\varrho\left[\frac{1}{(m+1)^{2n}} - \frac{1}{1^{2n}}\right].$$

Löst man die einzelnen Klammern auf der rechten Seite auf, setzt die von m unabhängige Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}B_1\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}B_{2n-1}\frac{1}{1^{2n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}B_{2n-1}\varrho\,\frac{1}{1^{2n}}$$

$= K$ und schreibt zu besserer Unterscheidung p für m, so wird

$$2)\quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$= K + l(p+1) - \frac{1}{2(p+1)} - \tfrac{1}{2}B_1\frac{1}{(p+1)^2} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{1}{(p+1)^3} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\frac{1}{(p+1)^{2n}} + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\frac{\varrho}{(p+1)^{2n}}.$$

Der Betrag der noch unbekannten Zahl K lässt sich auf folgende Weise ausmitteln. Man schreibe die Gleichung 2) in der Form

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - l(p+1)$$

$$= K - \frac{1}{2(p+1)} - \tfrac{1}{2}B_1\frac{1}{(p+1)^2} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{1}{(p+1)^3} - \dots\dots$$

Digitized by Google

$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} \frac{1}{(p+1)^{2n}} + \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} \frac{\varrho}{(p+1)^{2n}}$$

und gehe zur Gränze für unendlich wachsende p über, so wird

$$3)\quad Lim\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} - l(p+1)\right] = K.$$

Dass nun in der That die links angezeigte *Lim.* einen bestimmten angebbaren Werth hat und nicht etwa wie *Lim sin p* eine ganz unbestimmte Grösse ist, sieht man auf folgende Weise ein. Es sei

$$\psi(q) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{q-1} - lq$$

so ist offenbar für unendlich wachsende $q = p + 1$, $Lim\ \psi(q)$ mit dem gesuchten Gränzwerthe identisch. Man hat aber

$$\psi(q+1) - \psi(q) = \frac{1}{q} - l(q+1) + lq$$
$$= \frac{1}{q} - l\left(1 + \frac{1}{q}\right)$$

da aber immer $l\left(1+\frac{1}{q}\right) < \frac{1}{q}$ sein muss, wegen der bekannten für jedes $z < 1$ geltenden Reihe

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots$$

so ist die Differenz $\frac{1}{q} - l\left(1+\frac{1}{q}\right)$ positiv und mithin $\psi(q+1) > \psi(q)$, d. h. die Funktion $\psi(q)$ wächst mit q gleichzeitig immer fort. Dass aber dieses Wachsthum nicht ins Unendliche gehen könne, ergiebt sich so. Es ist immer $l(1+z) > z - \frac{1}{2}z^2$ folglich, wenn man für z der Reihe nach $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{q-1}$ setzt

$$l(\tfrac{3}{2}) > \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2$$
$$l(\tfrac{4}{3}) > \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^2$$
$$l(\tfrac{5}{4}) > \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l\left(\frac{q}{q-1}\right) > \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q-1}\right)^2$$

fügt man noch $1 = \frac{1}{1}$ zu der Summe dieser Gleichungen, so findet man sehr leicht

Digitized by Google

$$1+l\left(\frac{q}{2}\right) > \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{q-1}$$

$$- \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{q-1}\right)^2\right]$$

und durch eine einfache Transposition

$$1-l2 + \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + \ldots\ \ldots + \left(\frac{1}{q-1}\right)^2\right]$$

$$> \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{q-1} - lq$$

d. i.

$$\psi(q) < \tfrac{1}{2} - l2 + \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(q-1)^2}\right].$$

Um so mehr gilt num offenbar die folgende Ungleichung

$$\psi(q) < \tfrac{1}{2} - l2 + \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \textit{ in inf.}\right]$$

d. i. vermöge des bekannten Werthes der eingeklammerten unendlichen Reihe

$$\psi(q) < \tfrac{1}{2} - l2 + \frac{\pi^2}{2.6}$$

oder

$$\psi(q) < 0{,}62931985.$$

Hieraus zusammen folgt nun, dass $Lim\ \psi(q) = K$ eine weniger als 0,62931985 betragende Zahl ausmachen muss. Setzt man daher für p in die Formel 2) eine nur einigermassen bedeutende Zahl und berechnet beide Seiten der Gleichung soweit dies möglich, so ist man sicher einen Näherungswerth für K zu finden.

Gewöhnlich stellt man die Formel 2) in einer etwas andern Gestalt dar; die man aus der unsrigen dadurch erhält, dass man erst $p-1$ an die Stelle von p setzt und darnach beiderseits $\frac{1}{p}$ addirt. Es ergiebt sich so

$$4)\ \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{p}$$

$$= K + \frac{1}{2p} + lp - \tfrac{1}{2}B_1\frac{1}{p^2} + \tfrac{1}{4}B_3\frac{1}{p^4} - \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\frac{1}{p^{2n}} + \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\frac{\varrho}{p^{2n}}$$

Digitized by Google

für $p = 10$ z. B. ist der Werth der linken Seite

$$2{,}928968253968253968\ldots$$

und wenn man von der Reihe rechts soviel Glieder nimmt, dass ihr Rest am kleinsten wird, was für $n = 11$ eintritt, so findet man

$$5)\quad K = 0{,}5772156649015328\ldots$$

also K identisch mit denjenigen Constanten, welche in der Reihe für den Integrallogarithmus vorkommt. Für $p = 1000$ findet man die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{1000}$$

auf 12 Dezimalstellen genau mittelst der Formel 4) in folgender Rechnung

$$\begin{aligned}
K &= 0{,}577215\ 6649015\\
+\quad \frac{1}{2p} &= 0{,}000500\ 0000000\\
lp &= 6{,}907755\ 2789821\\
-\ \tfrac{1}{2}B_1\frac{1}{p^2} &= -0{,}000000\ 0833333\\
+\ \tfrac{1}{4}B_3\frac{1}{p^4} &= 0{,}000000\ 0000000
\end{aligned}$$

und dies giebt als Werth der gesuchten Summe

$$7{,}485470\ 8605503$$

woraus man ersieht mit welcher Langsamkeit die Summe der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ ins Unendliche wächst.

III. Setzt man $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^\mu}$, wo $\mu > 1$ sein soll, in der Formel 7) des vorigen Paragraphen und giebt ϱ dieselbe Bedeutung wie im ersten Beispiele, so findet man ohne weiteres

$$\begin{aligned}
h\sum_a^b \frac{1}{x^\mu} = {} & \frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{a^{\mu-1}} - \frac{1}{b^{\mu-1}}\right] - \tfrac{1}{2}h\left[\frac{1}{b^\mu} - \frac{1}{a^\mu}\right]\\
& - \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{1}\,B_1 h^2\left[\frac{1}{b^{\mu+1}} - \frac{1}{a^{\mu+1}}\right]\\
& + \tfrac{1}{4}\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\,B_3 h^4\left[\frac{1}{b^{\mu+3}} - \frac{1}{a^{\mu+3}}\right] - \ldots\\
\ldots + \frac{(-1)^n}{2n}\,\frac{\mu(\mu+1)\ldots\ldots(\mu+2n-2)}{1.2.3\ldots.(2n-1)}\,& B_{2n-1}h^{2n}\left[\frac{1}{b^{\mu+2n-1}} - \frac{1}{a^{\mu+2n-1}}\right]
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+ \varrho \frac{(-1)^n}{2n} \frac{\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+2n-2)}{1.2.3\ldots.(2n-1)} B_{2n-1} h^{2n} \left[\frac{1}{b^{\mu+2n-1}} - \frac{1}{a^{\mu+2n-1}}\right].$$

Nimmt man einfach $a = 1$, $h = 1$ und b ganz und positiv, so ist wie in I. $b = m + 1$; dabei wollen wir p für m schreiben und rechts die Binomialkoeffizienten zur Abkürzung benutzen. Es wird dann

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots. + \frac{1}{p^\mu}$$

$$= -\frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{(p+1)^{\mu+1}} - 1\right] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+1)^\mu} - 1\right]$$

$$- \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 \left[\frac{1}{(p+1)^{\mu+1}} - 1\right] + \tfrac{1}{4}(\mu+2)_3 B_3 \left[\frac{1}{(p+1)^{\mu+3}} - 1\right] - \ldots$$

$$\ldots. + \frac{(-1)^n}{2n} (\mu+2n-2)_{2n-1} B_{2n-1} \left[\frac{1}{(p+1)^{\mu+2n-1}} - 1\right]$$

$$+ \varrho \frac{(-1)^n}{2n} (\mu+2n-2)_{2n-1} B_{2n-1} \left[\frac{1}{(p+1)^{\mu+2n-1}} - 1\right].$$

Bezeichnet man die Summe der von p unabhängigen Glieder der rechten Seite mit K_μ, schreibt ferner $p - 1$ für p und addirt endlich beiderseits $\frac{1}{p^\mu}$, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots + \frac{1}{p^\mu}$$

$$= K_\mu - \frac{1}{\mu-1} \frac{1}{p^{\mu-1}} + \tfrac{1}{2} \frac{1}{p^\mu}$$

$$- \tfrac{1}{2}\mu_1 B_1 \frac{1}{p^{\mu+1}} + \tfrac{1}{4}(\mu+2)_3 B_3 \frac{1}{p^{\mu+3}} - \ldots..$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n} (\mu+2n-2)_{2n-1} B_{2n-1} \frac{1}{p^{\mu+2n-1}}$$

$$+ \varrho \frac{(-1)^n}{2n} (\mu+2n-2)_{2n-1} B_{2n-1} \frac{1}{p^{\mu+2n-1}}.$$

Um K_μ zu bestimmen braucht man nur p ins Unendliche wachsen zu lassen; es wird dann

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots \textit{ in inf.} = K_\mu$$

und da die Reihe links für $\mu > 1$ convergirt, so kann man durch direkte Berechnung ihre Summen finden. Nach *Legendre*'s Rechnung ist

Digitized by Google

μ	K_μ
2	1.64493 40668 482264
3	1.20205 69031 595943
4	1.08232 32337 111382
5	1.03692 77551 433700
6	1.01734 30619 844491
7	1.00834 92773 819227
8	1.00407 73561 979443
9	1.00200 83928 260822
10	1.00099 45751 278180
11	1.00049 41886 041194
12	1.00024 60865 533080
13	1.00012 27133 475785
14	1.00006 12481 350587
15	1.00003 05882 363070
16	1.00001 52822 594086
17	1.00000 76371 976379
18	1.00000 38172 932650
19	1.00000 19082 127166
20	1.00000 09539 620339
21	1.00000 04769 329868
22	1.00000 02384 505027
23	1.00000 01192 199260
24	1.00000 00596 081891
25	1.00000 00298 035035
26	1.00000 00149 015548
27	1.00000 00074 507118
28	1.00000 00037 253340
29	1.00000 00018 626597
30	1.00000 00009 313274
31	1.00000 00004 656629
32	1.00000 00002 328312
33	1.00000 00001 164155
34	1.00000 00000 582077
35	1.00000 00000 291038

IV. Ein sehr bemerkenswerthes Beispiel bietet endlich noch die Bestimmung der Summe

$$\sum_a^b \frac{k}{k^2+x^2}$$

wo k eine constante Grösse bezeichnet. Man hat nämlich

$$\varphi(x) = \frac{k}{k^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-k\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+k\sqrt{-1}}\right\}$$

mithin durch $(q-1)$ malige Differenziation

$$\varphi^{(q-1)}(x) = \tfrac{1}{2}(-1)^{q-1}\,1.2\ldots(q-1)\left\{\frac{1}{(x-k\sqrt{-1})^q} - \frac{1}{(x+k\sqrt{-1})^q}\right\}.$$

Setzt man $\varrho = \sqrt{x^2+k^2}$ und $\vartheta = Arctan\,\dfrac{k}{x}$, so ist

$$x-k\sqrt{-1} = \varrho(\cos\vartheta - \sqrt{-1}\,\sin\vartheta)$$
$$x+k\sqrt{-1} = \varrho(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,\sin\vartheta)$$

und daraus erhält man leicht

Digitized by Google

$$\varphi^{(q-1)}(x) = (-1)^{q-1} 1.2..(q-1) \frac{\sin q\vartheta}{\varrho^q}$$

oder weil auch $\varrho \sin\vartheta = k$ ist

$$\varphi^{(q-1)}(x) = (-1)^{q-1}.1.2.3\ldots(q-1)\frac{\sin^q\vartheta \sin q\vartheta}{k^q}.$$

Bezeichnen wir mit ϑ' und ϑ'' dasjenige was aus ϑ wird, wenn wir $x = b$ und $x = a$ nehmen. so giebt die Formel 7) in § 11.

$$h\sum_a^b \frac{k}{k^2+x^2} = \left(Arctan\frac{b}{k} - Arctan\frac{a}{k}\right) - \tfrac{1}{2}h\left(\frac{k}{k^2+b^2} - \frac{k}{k^2+a^2}\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}B_1 \frac{h^2(\sin^2\vartheta'\sin 2\vartheta' - \sin^2\vartheta''\sin 2\vartheta'')}{k^2}$$

$$+ \tfrac{1}{4}B_3 \frac{h^4(\sin^4\vartheta'\sin 4\vartheta' - \sin^4\vartheta''\sin 4\vartheta'')}{k^4}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n-1}\frac{h^{2n}(\sin^{2n}\vartheta'\sin 2n\vartheta' - \sin^{2n}\vartheta''\sin 2n\vartheta'')}{k^{2n}}$$

$$+ R$$

wobei der Rest R einen Bruchtheil des letzten Gliedes ausmacht. Nehmen wir $h = 1$, b gleich einer ganzen positiven Zahl m, $a = 0$ und setzen das Aggregat aller nur von a und nicht von b abhängigen Glieder $= K$, so wird

$$\frac{1}{k} + \frac{k}{k^2+1^2} + \frac{k}{k^2+2^2} + \ldots + \frac{k}{k^2+(m-1)^2}$$

$$= K + Arctan\frac{m}{k} - \tfrac{1}{2}\frac{k}{k^2+m^2}$$

$$- \tfrac{1}{2}B_1 \frac{\sin^2\vartheta'\sin 2\vartheta'}{k^2} + \tfrac{1}{4}B_3 \frac{\sin^4\vartheta'\sin 4\vartheta'}{k^4} - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} \frac{\sin^{2n}\vartheta'\sin 2n\vartheta'}{k^{2n}} + R'$$

wo wieder R' einen aliquoten Theil des letzten Reihengliedes ausmacht. Um K zu finden, lassen wir m ins Unendliche wachsen und haben dann

$$\frac{1}{k} + \frac{k}{k^2+1^2} + \frac{k}{k^2+2^2} + \ldots \text{ in inf.} = K + \frac{\pi}{2}$$

Digitized by Google

weil in diesem Falle $\vartheta' = Arctan \frac{k}{m}$ in Null übergeht. Die Summe der vorstehenden unendlichen Reihe ist aber leicht zu finden, wenn man in der bekannten Gleichung

$$\cot u = \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2 - u^2} - \frac{2u}{(2\pi)^2 - u^2} - \frac{2u}{(3\pi)^2 - u^2} - \cdots\cdots$$

$u = k\pi\sqrt{-1}$ setzt. Man erhält so

$$\frac{\pi}{2} \frac{e^{k\pi} + e^{-k\pi}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} = \frac{1}{2k} + \frac{k}{1^2 + k^2} + \frac{k}{2^2 + k^2} + \cdots\cdots$$

und mithin durch Vergleichung mit den Vorigen

$$K = \frac{\pi}{2} \frac{e^{k\pi} + e^{-k\pi}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \frac{1}{2k} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{e^{2k\pi} - 1} + \frac{1}{2k}.$$

Substituiren wir dies in das Vorhergehende, schreiben p für m und ϑ für ϑ', so dass also

$$\vartheta = Arctan \frac{k}{p} \text{ und } Arctan \frac{p}{k} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

ist, so gelangen wir zu der eleganten Formel

$$\frac{1}{k} + \frac{k}{k^2 + 1^2} + \frac{k}{k^2 + 2^2} + \ldots + \frac{k}{k^2 + (p-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2k} + \frac{\pi}{e^{2k\pi} - 1} + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

$$- \tfrac{1}{2} B_1 \frac{\sin^2\vartheta \sin 2\vartheta}{k^2} + \tfrac{1}{4} B_3 \frac{\sin^4\vartheta \sin 4\vartheta}{k^4} - \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n} B_{2n-1} \frac{\sin^{2n}\vartheta \sin 2n\vartheta}{k^{2n}} + R$$

wo der Rest wieder einen aliquoten Theil des letzten Reihengliedes ausmacht.

§. 13.

Digression über die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

Die Formeln des vorletzten Paragraphen sind ausser ihrer Bedeutung für die umgekehrte Differenzenrechnung auch noch für die Integralrechnung von Wichtigkeit. Da sie nämlich einen Zusammenhang zwischen der bestimmten Summe und dem bestimmten Integrale

Digitized by Google

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}}\varphi(x) \quad \text{und} \quad \int_a^b \varphi(x)dx$$

angeben, so kann man ebensowohl jene durch dieses ausdrücken, als auch umgekehrt das bestimmte Integral mit Hülfe der bestimmten Summe berechnen. Dies letztere ist in den Fällen von Vortheil, wo man die Summe leicht unmittelbar auffinden kann und in der That hat auch diese Bestimmnng keine Schwierigkeit, sobald $b-a$ ein Vielfaches von h ausmacht. Nimmt man $h = \frac{b-a}{m}$ einigermassen klein, so geben schon ein paar Anfangsglieder der halbconvergenten Reihe eine bedeutende Annäherung (wie in dem Beispiele für $\Sigma\frac{1}{x}$) und man kann daher näherungsweis

$$h\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}}\varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}h[\varphi(b)-\varphi(a)]$$
$$+ \frac{B_1h^2}{1.2}\Big[\varphi'(b)-\varphi'(a)\Big] - \frac{B_2h^4}{1.2.3.4}\Big[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\Big]$$

setzen und hieraus ergiebt sich leicht, weil h ein aliquoter Theil von $b-a$, also $b = a + mh$ ist,

$$1) \quad \int_a^b \varphi(x)dx$$
$$= h[\tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(a+\overline{m-1}h) + \tfrac{1}{2}\varphi(a+mh)]$$
$$- \frac{h^2}{12}\Big[\varphi'(b)-\varphi'(a)\Big] + \frac{h^4}{720}\Big[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\Big]$$

wobei aber vorausgesetzt werden muss, dass $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ und $\varphi'''(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ stetig und endlich bleiben. — Es ist übrigens sehr leicht, der Gleichung 1) eine geometrische Bedeutung abzugewinnen. Werden nämlich in einer durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ characterisirten Curve*) die den Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Ordinaten construirt, so schliessen die-

*) Es ist hierbei immer ein rechtwinkliches Coordinatensystem vorausgesetzt.

Digitized by Google

selben mit der Strecke $b - a$ der Abscissenachse und der Curve selbst eine Fläche ein, deren Grösse durch

$$\int_a^b y dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

ausgedrückt wird. Theilt man ferner die Strecke $b - a$ in m gleiche Theile und nennt h einen solchen Theil, so kann man jene Fläche leicht in Streifen zerlegen, wenn man durch den Endpunkt jedes Theiles eine Ordinate legt. Um nun vorerst bei einer noch etwas rohen Annäherung stehen zu bleiben, sehen wir jeden solchen Streifen als Trapez an und dann giebt die Summe ihrer Flächen einen approximativen Werth der krummlinig begränzten Fläche. Diese Summe ist:

$$\tfrac{1}{2}h[\varphi(a) + \varphi(a+h)] + \tfrac{1}{2}h[\varphi(a+h) + \varphi(a+2h)] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \tfrac{1}{2}h[\varphi(a + \overline{m-2}h) + \varphi(a + \overline{m-1}h)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}h[\varphi(a + \overline{m-1}h) + \varphi(a + mh)]$$

und sie stimmt mit der in No. 1) vorkommenden Summe überein. Die ausserdem auf der rechten Seite der Gleichung 1) befindlichen Grössen bilden daher zusammen eine Correktion um die Annäherung weiter zu treiben. Um die Brauchbarkeit der Formel an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir das Iutegral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

auf die angedeutete Weise berechnen, was zugleich den Grad der Genauigkeit der Formel 1) einigermassen erkennen lässt, da der Werth des fraglichen Integrales im Voraus bekannt und $= \frac{1}{4}\pi$ ist. Wir haben hier $a = 0$, $b = 1$ und nehmen $m = 4$ also $h = \frac{1}{4}$. Die auf der rechten Seite von 1) in Klammern stehende Summe ist jetzt

für $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(\frac{0}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(\frac{4}{4})^2}$$
$$= 0{,}5 + 0{,}94117647058 + 0{,}8 + 0{,}64 + 0{,}25$$
$$= 3{,}13117647058$$

Digitized by Google

und der vierte Theil hiervon beträgt

$$0{,}78279411764.$$

Zu dieser Summe von Trapezen ist nun die Correktion hinzuzufügen. Man findet leicht

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad \varphi'''(x) = \frac{24(x-x^3)}{(1+x^2)^4}$$

mithin

$$\varphi'(b) - \varphi'(a) = -\frac{2}{2^2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\varphi'''(b) - \varphi'''(a) = 0.$$

Der Betrag der Correktion ist mithin

$$+\frac{1}{4^2.12}\,.\,\tfrac{1}{2} = 0{,}00260416666$$

und nach Hinzufügung derselben ergiebt sich der Näherungswerth

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}7853982843$$

welcher von dem wahren Werth $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7853981634$ erst in der siebenten Decimalstelle differirt.

Man kann der Gleichung 1) leicht noch eine andere Gestalt geben wenn man sie zuvörderst in der Form

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

$$= h[\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(a+\overline{m-1}h)]$$
$$+\frac{h}{2}\Big[\varphi(b)-\varphi(a)\Big] - \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Big[\varphi'(b)-\varphi'(a)\Big]$$
$$+\tfrac{1}{45}\left(\frac{h}{2}\right)^4\Big[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\Big]$$

schreibt und darauf $\varphi(x) = \psi(x+\frac{1}{2}h)$ setzt. Entwickelt man $\psi(x+\frac{1}{2}h)$ nach dem Taylorschen Satze und vernachlässigt alle Glieder, welche höhere Potenzen von h enthalten als die vierte, so treten folgende Substitutionen ein

$$\varphi(x) = \psi(x) + \frac{h}{2}\,\frac{\psi'(x)}{1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{\psi''(x)}{1.2}$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{\psi'''(x)}{1.2.3} + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\psi''''(x)}{1.2.3.4}$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx + \frac{h}{2}\,\frac{\psi(b)-\psi(a)}{1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\psi'(b)-\psi'(a)}{1.2}$$

$$+\left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{\psi''(b)-\psi''(a)}{1.2.3} + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\psi'''(b)-\psi'''(a)}{1.2.3.4}$$

$$\frac{h}{2}\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\psi(b)-\psi(a)\right] + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\psi'(b)-\psi'(a)}{1} + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{\psi''(b)-\psi''(a)}{1.2}$$

$$+\left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\psi'''(b)-\psi'''(a)}{1.2.3}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \left[\varphi'(b)-\varphi'(a)\right]$$

$$= -\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \left[\psi'(b)-\psi'(a)\right] - \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{\psi''(b)-\psi''(a)}{1}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\psi'''(b)-\psi'''(a)}{1.2}$$

$$+\tfrac{1}{45}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right] = +\tfrac{1}{45}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \left[\psi'''(b)-\psi'''(a)\right].$$

Ausserdem geht die Summe

$$\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(a+\overline{m-1}h)$$

in

$$\psi(a+\tfrac{1}{2}h) + \psi(a+\tfrac{3}{2}h) + \psi(a+\tfrac{5}{2}h) + \ldots + \psi\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)$$

über. Nach Vereinigung aller Glieder mit gleichen Potenzen von h erhält man jetzt

$$2)\quad \int_a^b \psi(x)dx$$

$$= h\left[\psi(a+\tfrac{1}{2}h) + \psi(a+\tfrac{3}{2}h) + \psi(a+\tfrac{5}{2}h) + \ldots + \psi\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)\right]$$

$$+\frac{h^2}{24}\left[\psi'(b)-\psi'(a)\right] - \frac{7h^4}{5760}\left[\psi'''(b)-\psi'''(a)\right].$$

Digitized by Google

Auch hier ist die geometrische Bedeutung eine sehr einfache; zerlegt man nämlich die durch das bestimmte Integral linker Hand ausgedrückte Fläche wieder in Streifen wie vorhin und sieht jeden Streifen als ein Rechteck an, welches $\frac{b-a}{m} = h$ zur Basis und die in der Mitte der Grundlinie errichtete Ordinate zur Höhe hat, so giebt die Rechtecksumme

$$h\psi(a+\tfrac{1}{2}h) + h\psi(a+\tfrac{3}{2}h) + h\psi(a+\tfrac{5}{2}h) + \ldots + \psi\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)$$

einen Näherungswerth für unsere Fläche. Da nun die genannte Rechteckssumme auch in der Formel 2) vorkommt, so ersieht man, dass die letztere auf ähnliche Weise durch Rechtecke wie die Formel 1) durch Trapeze die Annäherung bewerkstelligt. Nehmen wir beispielweis wie vorhin $a = 0$, $b = 1$, $m = 4$

$$\psi(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

so wird $h = \frac{1}{4}$ und die rechte Seite der Gleichung 2) geht über in

$$\frac{16}{65} + \frac{16}{73} + \frac{16}{89} + \frac{16}{113} - \frac{1}{16.24} \cdot \frac{1}{2}$$

oder

$$\begin{array}{r} 0{,}24615\ 38461\ 5 \\ 0{,}21917\ 80821\ 9 \\ 0{,}17977\ 52808\ 9 \\ 0{,}14159\ 29203\ 5 \\ \hline 0{,}78670\ 01295\ 8 \\ -\ 0{,}00130\ 20833\ 3 \\ \hline 0{,}78539\ 80462\ 5 \end{array}$$

was von dem wahren Werth $\frac{1}{4}\pi$ erst in der siebenten Decimalstelle abweicht. Wäre der Betrag des Integrales im Voraus nicht bekannt gewesen, so hätte man doch aus der Vergleichung der nach den beiden verschiedenen Methoden erhaltenen Zahlenwerthe

$$\begin{array}{r} 0{,}78539\ 82843 \\ 0{,}78539\ 80463 \end{array}$$

den Schluss ziehen können, dass auf sechs Dezimalstellen genau der Werth des gesuchten Integrales $= 0{,}785398$ sei. Ueberhaupt wird

Digitized by Google

man immer wohl thun, den Werth eines unbekannten Integrales nach zwei verschiedenen Methoden zu berechnen, weil man ausserdem nicht angeben kann, auf wie viel Dezimalstellen das gefundene Resultat richtig ist; ohne Kenntniss aber des Grades der Annäherung haben Zahlenangaben nur sehr untergeordneten Werth.

§. 14.

Einfache Summirung durch Quadraturen.

Eine der brauchbarsten Darstellungen von $\Sigma\varphi(x)$ besteht darin, dass man diese unbekannte Summe in ein einfaches bestimmtes Integral (Quadratur) verwandelt, worin x als willkürliche Constante erscheint. Diese Ausdrucksweise ist besonders deswegen von Nutzen, weil sie die gesuchte Summe in einer geschlossenen Form giebt, wodurch weitere Untersuchungen jedenfalls bequemer werden, als wenn man $\Sigma\varphi(x)$ in eine unendliche Reihe aufgelöst hätte. Der Entwickelung dieser merkwürdigen Resultate müssen wir aber erst die Ableitung zweier bestimmten Integrale vorausschicken.

I. Es sei zunächst der Werth des Integrales

$$1)\quad S = \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

worin s eine ganze positive von Null verschiedene Zahl bedeutet, zu ermitteln. — Beachtet man, dass

$$\frac{1}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\, e^{-2\pi t}$$

ist und wandet auf den rechts stehenden Bruch die Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

an, so erhält man ohne Mühe für $x = e^{-2\pi t}$

$$\frac{1}{e^{2\pi t}-1}$$

$$= e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} + e^{-6\pi t} + \ldots\ldots e^{-2n\pi t} + \frac{e^{-2n\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}\, e^{-2\pi t}$$

Digitized by Google

oder durch Transposition des Restes

$$\frac{1}{e^{2\pi t}-1} - \frac{1}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}$$

$$= e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} + e^{-6\pi t} + \ldots., + e^{-2n\pi t}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $t^{2s-1}dt$ und integrirt darauf allerseits zwischen den Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{t^{2s-1}dt}{e^{2\pi t}-1} - \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}dt$$

$$= \int_0^\infty t^{2s-1}e^{-2\pi t}dt + \int_0^\infty t^{2s-1}e^{-4\pi t}dt + \ldots\ldots$$

$$\ldots. + \int_0^\infty t^{2s-1}e^{-2n\pi t}dt$$

wobei links das erste Integral $= S$ ist und alle Integrationen auf der rechten Seite mit Hülfe der bekannten Formel

$$\int_0^\infty t^{p-1}e^{-kt}\,dt = \frac{1.2.3\ldots(p-1)}{k^p}$$

ausgeführt werden können. Es ergiebt sich so

$$2)\quad S - \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}dt$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(2s-1)}{(2\pi)^{2s}}\left[\frac{1}{1^{2s}} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{3^{2s}} + \ldots + \frac{1}{n^{2s}}\right]$$

Ueber das links vorkommende Integral bemerken wir Folgendes. Der Ausdruck

$$\frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}.$$

kann zwischen den Gränzen $t = 0$ bis $t = \infty$ nicht unendlich werden; denn hierzu wäre nöthig, dass entweder sein Nenner $= 0$ oder sein Zähler unendlich würde. Der erste dieser beiden Fälle tritt nun allerdings für $t = 0$ ein, aber dann verschwindet auch der Zähler und man findet nach den gewöhnlichen Methoden zur Bestimmung des wahren Werthes unbestimmt scheinender Brüche, dass für $t = 0$

Digitized by Google

$$\frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1} = 1 \text{ ist für } s = 1$$

und $= 0$ für jedes $s > 1$.

Im andern Falle, wo t^{2s-1} unendlich werden soll, kann nur $t = \infty$ sein und jetzt wird der Nenner ebenfalls unendlich und man findet leicht, dass für $t = \infty$

$$\frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1} = 0$$

wird. Da nun unser in Rede stehender Bruch selbst in den ungünstigsten Fällen nicht unendlich wird, so folgt, dass er innerhalb der Gränzen $t = 0$ bis $t = \infty$ stets endlich bleibt und dass mithin auch sein Maximum A und sein Minimum B, welche er während jenes Intervalles erreichen kann, endliche bestimmte Grössen sind. Es ist also für jedes t von $t = 0$ bis $t = \infty$

$$A - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1} \text{ positiv}$$

$$B - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1} \text{ negativ}$$

und da $e^{-2n\pi t}$ innerhalb jenes Intervalles positiv bleibt auch

$$\left(A - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\right) e^{-2n\pi t} > 0$$

$$\left(B - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\right) e^{-2n\pi t} > 0$$

hieraus folgt augenblicklich nach dem Satze, dass wenn $\psi(t)$ innerhalb des Intervalles $t = \alpha$ bis $t = \beta$ sein Zeichen nicht ändert, auch

$$\int_\alpha^\beta \psi(t)dt$$

dasselbe Vorzeichen wie $\psi(t)$ besitzt,

$$\int_0^\infty \left(A - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\right) e^{-2n\pi t}dt > 0$$

$$\int_0^\infty \left(B - \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\right) e^{-2n\pi t}dt < 0$$

Digitized by Google

und durch Integration der einzelnen Theile fliesst hieraus die Ungleichung

$$A\int_0^\infty e^{-2n\pi t}dt > \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}dt > B\int_0^\infty e^{-2n\pi t}dt$$

$$\frac{A}{2n\pi} > \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}dt > \frac{B}{2n\pi}.$$

Lassen wir die noch unbestimmte ganze Zahl n ins Unendliche wachsen und beachten, dass A und B von n unabhängige Grössen sind, so folgt $Lim\,\frac{A}{2n\pi} = Lim\,\frac{B}{2n\pi} = 0$ und mithin auch

$$Lim \int_0^\infty \frac{t^{2s-1}}{e^{2\pi t}-1}\, e^{-2n\pi t}dt = 0 \quad , \quad n = \infty.$$

Dieses Resultat lässt sich mit Vortheil für die Gleichung 2) benutzen; gehen wir nämlich auch in dieser zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird

$$S = \frac{1.2\ldots(2s-1)}{(2\pi)^{2s}}\left[\frac{1}{1^{2s}} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{3^{2s}} + \ldots \textit{ in inf.}\right]$$

d. i. nach einer sehr bekannten Summenformel

$$S = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{2s}\,B_{2s-1}$$

und vermöge des ursprünglichen Werthes von S haben wir nun die Integralformel

$$3)\quad 2\int_0^\infty \frac{t^{2s-1}dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{2s}\,B_{2s-1}$$

worin B_{2s-1} die s^{te} Bernoullische Zahl bezeichnet.

II. Mittelst der so eben entwickelten Gleichung ist es sehr leicht, den Werth des Ausdruckes

$$4)\quad V = \frac{1}{v} + 2\int_0^\infty \frac{\sin vt\, dt}{e^{2\pi t}-1}$$

aufzufinden. Dann setzt man statt $\sin vt$ die bekannte stets convergente Reihe, so wird

Digitized by Google

$$V = \frac{1}{v} + 2\int_0^\infty \left\{\frac{vt}{1} - \frac{v^3t^3}{1.2.3} + \frac{v^5t^5}{1.2..5} - \ldots\right\} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{v}{1}\cdot 2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} - \frac{v^3}{1.2.3}\cdot 2\int_0^\infty \frac{t^3dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$+ \frac{v^3}{1.2..5}\cdot 2\int_0^\infty \frac{t^5dt}{e^{2\pi t}-1} - \ldots\ldots$$

d. i. wenn man alle Integrationen auf der rechten Seite mit Hülfe der Formel 3) für $s = 1, 2, 3, \ldots$ ausführt

$$5)\qquad V = \frac{1}{v} + \frac{B_1 v}{1.2} - \frac{B_3 v^3}{1.2.3.4} + \frac{B_5 v^5}{1.2..6} - \ldots\ldots$$

Nimmt man dagegen in der bekannten Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - \frac{B_1 u}{1.2} - \frac{B_3 u^3}{1.2.3.4} - \frac{B_5 u^5}{1.2..6} - \ldots\ldots$$

$u = v\sqrt{-1}$, so ergiebt sich nach beiderseitiger Multiplikation mit $\sqrt{-1}$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}v}+e^{-\frac{1}{2}v}}{e^{\frac{1}{2}v}-e^{-\frac{1}{2}v}} = \frac{1}{v} + \frac{B_1 v}{1.2} = \frac{B_3 v^3}{1.2.3.4} + \frac{B_5 v^5}{1.2..6} - \ldots\ldots$$

mithin durch Vergleichung mit 5)

$$V = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}v}+e^{-\frac{1}{2}v}}{e^{\frac{1}{2}v}-e^{-\frac{1}{2}v}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^v+1}{e^v-1} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{e^v-1}.$$

Substituirt man für V den ursprünglichen in No. 4) verzeichneten Ausdruck, so folgt aus dem Vorstehenden die Gleichung

$$6)\qquad \frac{1}{e^v-1} = \frac{1}{v} - \tfrac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\sin vt\,dt}{e^{2\pi t}-1}$$

von der wir gleich nachher Gebrauch machen werden.

III. Der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_a^b e^{xu} f(u)\,du$$

ist offenbar nur von a, b und x abhängig und bildet daher irgend eine Funktion von x; setzen wir nun

Digitized by Google

$$7) \qquad \int_a^b e^{xu} f(u)\, du = \varphi(x)$$

so lässt sich für jede auf diese Weise entstandene Funktion $\varphi(x)$ leicht ein einfaches bestimmtes Integral angeben, wodurch man den Werth von $\Sigma\varphi(x)$ erhält. Zunächst ist leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$\Sigma\varphi(x) = \Sigma \int_a^b e^{xu} f(u)\, du = \int_a^b \Sigma(e^{xu}) f(u) du$$

einzusehen*), aus welcher man vermöge des bekannten Werthes von $\Sigma(e^{ux})$ sogleich erhält

$$\Sigma\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{xu}}{e^{hu} - 1} f(u) du.$$

Nach Formel 6) ist aber andererseits

$$\frac{1}{e^{hu} - 1} = \frac{1}{hu} - \tfrac{1}{2} + 2 \int_0^\infty \frac{\sin hut\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks

---

*) Setzt man nämlich vor der Hand noch unbestimmt

$$\Sigma\varphi(x) = \int_a^b \psi(x) f(u) du$$

und nimmt davon die Differenz, so ist

$$\Delta\Sigma\varphi(x) = \int_a^b \psi(x+h) f(u) du - \int_a^b \psi(x) f(u) du$$

$$= \int_a^b \{\psi(x+h) - \psi(x)\} f(u) du$$

oder kürzer

$$\varphi(x) = \int_a^b \{\Delta\psi(x)\} f(u) du$$

und wenn man dies mit No. 7. vergleicht, so folgt $\Delta\psi(x) = e^{xu}$, mithin $\psi(x) = (\Sigma e^{xu})$ wie im Texte behauptet wurde.

Digitized by Google

$$\Sigma\varphi(x) = \int_a^b e^{xu} f(u)du \left\{ \frac{1}{hu} - \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\sin hut\, dt}{e^{2\pi t} - 1} \right\}$$

d. i.

$$8)\quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int_a^b \frac{e^{xu}}{u} f(u)\, du - \frac{1}{2}\int_a^b e^{xu} f(u)du$$

$$+ 2\int_a^b e^{xu} f(u)du \int_0^\infty \frac{\sin hut\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

Der Werth des ersten Integrales ist leicht zu finden; denn setzen wir

$$\int_a^b \frac{e^{xu}}{u} f(u)\, du = y$$

so ergiebt sich durch Differenziation nach x

$$\int_a^b e^{xu} f(u)du = \frac{dy}{dx}$$

wobei die linke Seite $= \varphi(x)$ ist nach No. 7); aus $\varphi(x) = \frac{dy}{dx}$ folgt jetzt

$$y = \int \varphi(x)dx + C$$

Benutzen wir dies und die Gleichung 7) unmittelbar, so geht die Formel 8) in die folgende über

$$9)\quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_a^b e^{xu} f(u)\, du \int_0^\infty \frac{\sin hut\, dt}{e^{2\pi t} - 1} + C$$

wo es noch auf die Reduktion des Doppelintegrales rechts ankommt. Da der Ausdruck

$$e^{xu} f(u)\ \frac{\sin hut}{e^{2\pi t} - 1}$$

immer endlich und stetig bleibt, welches Paar spezieller Werthe für u und t man auch aus den Intervallen $u = a$ bis $u = b$ und $t = 0$ bis $t = \infty$ herausgreifen möge, vorausgesetzt, dass $f(u)$ während des Intervalles $u = a$ bis $u = b$ weder unendlich noch diskontinuirlich wird, so ist es erlaubt, in dem fraglichen Doppelintegrale die Integra-

Digitized by Google

tionen in umgekehrter Ordnung vorzunehmen und es also in der neuen Form

$$10) \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\int_a^b e^{xu} \sin htu\, f(u)\, du$$

darzustellen. Die Integration in Beziehung auf u ist hier sehr leicht auszuführen; denn man hat für $\sqrt{-1} = i$

$$\int_a^b e^{xu} \sin htu\, f(u)\, du$$

$$= \int_a^b e^{xu}\, \frac{e^{htui} - e^{-htui}}{2i} = \frac{1}{2i}\left\{\int_a^b e^{(x+hti)u} f(u)\, du \right.$$

$$\left. - \int_a^b e^{(x-hti)u} f(u)\, du \right\}$$

d. i. wenn man die Formel 7) berücksichtigt

$$= \frac{1}{2i}\left\{\varphi(x+hti) - \varphi(x-hti)\right\}.$$

Substituiren wir diess in 10), so reduzirt sich das in Rede stehende Doppelintegral auf ein einfaches und nach No. 9) erhalten wir jetzt die merkwürdige Formel

$$11) \quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{h}\int \varphi(x)dx + C - \tfrac{1}{2}\varphi(x)$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\, \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})-\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

die wir zunächst durch einige Beispiele illustriren wollen.

§. 15.

Beispiele und Erweiterung des vorigen Theoremes.

Die Funktion $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ gehört unter die grosse Zahl derjenigen Funktionen, auf welche sich die Formel 11) im vorigen Paragraphen anwenden lässt; da nämlich

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{0} e^{xu}du = \frac{1}{x}$$

ist, so erfüllt $\varphi(x)$ die ihm auferlegte Bedingung. Beachtet man ferner, dass jetzt unter Voraussetzung eines positiven x

$$\int \varphi(x)dx = \int \frac{dx}{x} = lx + Const.$$

$$\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1}) = -\frac{2ht\sqrt{-1}}{x^2 + h^2t^2}$$

so führt das Theorem 11) unmittelbar zu der Formel

$$1)\ \Sigma\frac{1}{x} = \frac{1}{h}lx + C - \frac{1}{2x} - 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}\,\frac{ht}{x^2 + h^2t^2}.$$

Hieraus lässt sich ohne Mühe auch wieder die halbconvergente Reihe für $\Sigma\frac{1}{x}$ ableiten, was um so weniger überflüssig ist, als diese Entwickelung viel Licht auf die Theorie jener Reihen wirft. Schreibt man nämlich die Gleichung 1) in der Form

$$2)\ \Sigma\frac{1}{x} = \frac{lx}{h} + C - \frac{1}{2x} - 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\frac{ht}{x}}{1 + \left(\frac{ht}{x}\right)^2}$$

so liegt der Gedanke sehr nahe, das Integral auf der rechten Seite dadurch zu verwerthen, dass man den Bruch

$$\frac{\frac{ht}{x}}{1 + \left(\frac{ht}{x}\right)^2}$$

in eine Reihe verwandelt, und darauf die einzelnen Glieder derselben nach Multiplikation mit $\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}$ integrirt. Man kann aber die fragliche Reihe nicht ins Unendliche gehen lassen, weil die bekannte Formel

$$\frac{v}{1+v^2} = v - v^3 + v^5 - v^7 + \ldots .\ in\ inf.$$

ein ächt gebrochenes v voraussetzt, was hier wo $v = \frac{ht}{x}$ zu setzen wäre, wegen des Intervalles $t = 0$ bis $t = \infty$ nicht zu erlangen ist. Man muss sich daher mit der Verwandlung in eine endliche Reihe begnügen, indem man die Formel

$$\frac{v}{1+v^2} = v - v^3 + v^5 - v^7 + \ldots\ldots + (-1)^n v^{2n-3} + \frac{(-1)^{n+1} v^{2n-1}}{1+v^2}$$

in Anwendung bringt, die für jedes beliebige v richtig bleibt. Man findet so ohne Mühe:

$$\frac{2}{x}\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\frac{ht}{x}}{1+\left(\frac{ht}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{h}{x^2}\,2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} - \frac{h^3}{x^4}\,2\int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t}-1} + \frac{h^5}{x^6}\,2\int_0^\infty \frac{t^5 dt}{e^{2\pi t}-1} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{h^{2n-3}}{x^{2n-2}}\,2\int_0^\infty \frac{t^{2n-3}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{h^{2n-1}}{x^{2n-2}}\,2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi}-1}\,\frac{1}{x^2+h^2t^2}$$

und durch Ausführung der einzelnen Integrationen rechts nach Formel 3) im §. 14

$$3)\quad \frac{2}{x}\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\frac{ht}{x}}{1+\left(\frac{ht}{x}\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}B_1\,\frac{h}{x^2} - \tfrac{1}{4}B_3\,\frac{h^3}{x^4} + \tfrac{1}{6}B_5\,\frac{h^5}{x^6} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n-2}\,B_{2n-3}\,\frac{h^{2n-3}}{x^{2n-2}}$$

$$+ (-1)^{n+1}\,\frac{h^{2n-1}}{x^{2n-1}}\,.\,2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{x^2+h^2t^2}.$$

Digitized by Google

Da nun ferner $\frac{1}{x^2}$ das Maximum von $\frac{1}{x^2+h^2t^2}$ innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = \infty$ darstellt, also

$$\frac{1}{x^2+h^2t^2} < \frac{1}{x^2}$$

ist und ausserdem der Faktor $\frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t}-1}$ während desselben Intervalles sein Vorzeichen nicht ändert, so ist

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{x^2+h^2t^2} < 2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{x^2}$$

d. i.

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{x^2+h^2t^2} < \frac{1}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{1}{x^2}$$

und mithin dürfen wir das Integral $= \frac{\lambda}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{1}{x^2}$ setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Substituiren wir dies in 3) und die so entstehende Gleichung in No. 2), so gelangen wir zu der Formel

$$\Sigma\frac{1}{x} = \frac{lx}{h} + C - \frac{1}{2x} - \tfrac{1}{2}B_1\,\frac{h}{x^2} + \tfrac{1}{4}B_3\,\frac{h^3}{x^4} - \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-2}\,B_{2n-3}\,\frac{h^{2n-3}}{x^{2n-2}} + \frac{(-1)^n\lambda}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{h^{2-n1}}{x^{2n}}.$$

Hieraus ergiebt sich endlich durch Addition der identischen Gleichung

$$0 = \frac{(-1)^n}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{h^{2n-1}}{x^{2n}} - \frac{(-1)^n}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{h^{2n-1}}{x^{2n}}$$

für $1 - \lambda = \varrho$, wo ϱ positiv ächt gebrochen ist

$$4)\quad \Sigma\frac{1}{x} = \frac{lx}{h} + C - \frac{1}{2x} - \tfrac{1}{2}B_1\,\frac{h}{x^2} + \tfrac{1}{4}B_3\,\frac{h^3}{x^4} - \ldots.$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{h^{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{(-1)^n\varrho}{2n}\,B_{2n-1}\,\frac{h^{2n-1}}{x^{2n}}.$$

Dieses Resultat stimmt vollkommen mit dem in §. 12. II. verzeichneten zusammen und man erhält das letztere daraus, indem man $x = b$, $x = a$ setzt und nach geschehener Subtraktion mit h multiplizirt.

Digitized by Google

Zugleich hat man aber den Vortheil, den innern Grund der nicht durchgängigen Convergenz der Reihe zu erkennen, indem das Integral

$$\frac{2h^{2n-1}}{x^{2n}}\int_0^{\infty}\frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}\;\frac{1}{x^2+h^2t^2}$$

welches den Rest der Reihe bildet, für unendlich wachsende n sich nicht der Gränze Null nähert, sondern im Gegentheile unendlich wächst, obschon es anfangs abnimmt.

II. Nimmt man das Integral von $e^{xu}du$ zwischen den Gränzen $u = 1$ und $u = -\infty$, so wird

$$\int_{-\infty}^{1} e^{xu}du = \frac{e^x}{x}$$

und hieraus geht hervor, dass man $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$ setzen darf. Diess giebt

$$\int\varphi(x)dx = \int\frac{e^x}{x}\;dx = li(e^x) + Const$$

wo li den Integrallogarithmus bezeichnet; ferner ist für $\sqrt{-1} = i$

$$\frac{\varphi(x+hti)-\varphi(x-hti)}{2i} = \frac{e^{x+hti}}{x+hti} - \frac{e^{x-hti}}{x-hti}$$

$$= \left\{x\,\frac{e^{hti}-e^{-hti}}{2i} - hti\,\frac{e^{hti}+e^{-hti}}{2i}\right\}\frac{e^x}{x^2+h^2t^2}$$

$$= \frac{x\sin ht - ht\cos ht}{x^2+h^2t^2}\,e^x.$$

Mittelst dieser Substitutionen erhält man aus der Formel 11) in §. 14

$$5)\quad \Sigma\frac{e^x}{x} = \frac{1}{h}\,li(e^x) + C - \frac{e^x}{2x}$$
$$+ 2e^x\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{x\sin ht - ht\cos ht}{x^2+h^2t^2}$$

III. Da in der ganzen Ableitung unseres Theoremes 11) in §. 14 durchaus nichts liegt, was uns nöthigte, den Grössen a, b und $f(u)$ nur reelle Werthe beizulegen, so sind wir berechtigt, dasselbe auch auf solche Funktionen $\varphi(x)$ auszudehnen, welche ihre Entstehung

Digitized by Google

der Integration einer imaginären Funktion $f(u)$ zwischen imaginären Gränzen a und b verdanken. So ist z. B. für $a = -i$, $b = +i$, $f(u) = \frac{1}{2i}$, wo $i = \sqrt{-1}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{i} e^{xu}du = \frac{1}{x}\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \frac{\sin x}{x}$$

und daher muss unser Theorem auch für diese Funktion gelten. Diese Bemerkung ist deswegen von bedeutendem Gewicht, weil sich mit ihrer Hülfe zeigen lässt, dass jenes Theorem ganz allgemein für jede Funktion $\varphi(x)$ gilt, wenn nur x keine solchen speciellen Werthe erhält, dass $\varphi(x)$ dadurch unendlich würde. Hierzu bedarf es nur des Nachweises, dass jede Funktion $\varphi(x)$ unter die Form

$$\int_a^b e^{xu} f(u)\,du$$

gebracht werden kann. Setzt man nun $a = -\infty i$, $b = +\infty i$ und

$$6)\quad f(u) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\frac{e^{ut} + e^{-ut}}{2\pi i}\,dt$$

so wird

$$\int_a^b e^{xu} f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty i}^{\infty i} e^{xu}du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\frac{e^{ut} + e^{-ut}}{2i}\,dt.$$

Nimmt man hier $u = vi$, wo v eine neue Variable bezeichnet, so wird $du = i\,dv$; an die Stelle der früheren Gränzgleichungen $u = -\infty i$ und $u = \infty i$ treten die neuen $vi = -\infty i$ und $vi = \infty i$ d. i. $v = -\infty$ und $v = \infty$, und somit geht das obige Doppelintegral in das folgende über

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xvi}dv \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos vt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos xv\,dv \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos vt\,dt$$

Digitized by Google

$$+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin xv\,dv \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cos vt\,dt.$$

Denkt man sich jedes der beiden in Bezug auf v genommenen Integrale in zwei andere von $v = 0$ bis $v = +\infty$ und von $v = 0$ bis $v = -\infty$ zerlegt, und berücksichtigt, dass der Ausdruck $\cos xv \cos tv$ die Eigenschaft $\psi(-v) = \psi(v)$, dagegen $\sin xv \cos tv$ die Eigenschaft $\psi(-v) = -\psi(v)$ besitzt, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichungen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos xv\,dv \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cos vt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos xv\,dv \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cos vt\,dt$$

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin xv\,dv \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cos vt\,dt = 0.$$

Der Werth des ersten Integrales ist aber dem Theoreme von *Fourier* zufolge *) $= \varphi(x)$, wobei α und β ganz beliebige positive Grössen sein können und nur vorausgesetzt wird, dass x zwischen α und β liege und für kein derartiges x die Funktion $\varphi(x)$ unendlich werde. Bleibt daher $\varphi(x)$ endlich für alle x von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, so kann man die Gleichung

$$\varphi(x) = \int_{a}^{b} e^{xu} f(u)\,du$$

behaupten und sie zu einer identischen machen, indem man die für a, b und $f(u)$ angegebenen Substitutionen vornimmt. Die Formel 11) in §. 14 bildet mit dieser Erweiterung **die allgemeinste der einfachen Summenformel**, die nur verlangt werden kann und bietet zugleich den grossen Vortheil dar, **direkt** diejenigen Operationen aufzuzeigen, mittelst deren $\Sigma\varphi(x)$ aus $\varphi(x)$ abgeleitet wird. Das bisherige Verfahren nämlich, um die verschiedenen Funktionen mit endlichen Differenzen zu integriren, war ein durchaus indirektes, indem

*) Eine ausführliche Darstellung der mit diesem wichtigen Satze zusammenhangenden Lehren findet man in des Verf. „**Analytischen Studien II.**"

Digitized by Google

man nur dadurch zu der Lösung einer Aufgabe kam, dass man sie auf mehrere andere bereits gelöste zurückführte, womit sich zuletzt Alles auf wenige Grundformeln reduzirte, welche man durch Umkehrung der einfachsten Differenzenformeln erhalten hatte.

§. 16.

Reduktion vielfacher Summen auf einfache bestimmte Integrale.

Die Methode, welche in §. 14 zur Kenntniss von $\Sigma\varphi(x)$ führte, lässt sich ohne grosse Mühe auch zur Bestimmung der vielfachen Summe $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$ anwenden, wo n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Denn aus

$$1)\qquad \varphi(x) = \int_a^b e^{xu} f(u)\,du$$

folgt, indem man mehrmals hinter einander die Summe nimmt,

$$2)\qquad \Sigma^{(n)}\varphi(x) = \int_a^b \Sigma^{(n)}(e^{xu}) f(u)\,du = \int_a^b \frac{e^{xu}}{(e^{hu}-1)^n} f(u)\,du,$$

wo es nun darauf ankommt, den Faktor

$$\frac{1}{(e^{hu}-1)^n}$$

in ein bestimmtes Integral zu verwandeln, so wie es in §. 14 für $n = 1$ schon geschehen ist. Man gelangt hierzu durch folgende Betrachtungen. Bezeichnet man den n^{ten} Differenzialquotienten von $\psi(z)$ mit $D^n\psi(z)$, so gilt der Satz*):

$$(-1)^{n-1}D^{n-1}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)$$

$$= \overset{n-1}{J}_1\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \overset{n-1}{J}_2\left(\frac{1}{e^z-1}\right)^2 + \dots + \overset{n-1}{J}_2\left(\frac{1}{e^z-1}\right)^n$$

---

*) Ueber die Ableitung dieser von *Malmsten* gefundenen Formel sehe man des Verf. Handbuch der Differenzialrechnung S. 101. Formel 8.

Digitized by Google

oder für $\frac{1}{e^z - 1} = Z$

$$3)\quad (-1)^{n-1} D^{n-1} Z$$

$$= \overset{n-1}{J}_1 Z + \overset{n-1}{J}_2 Z^2 + \overset{n-1}{J}_3 Z^3 + \dots + \overset{n-1}{J}_n Z^n$$

wobei die mit J bezeichneten Coefficienten mittelst der Formel

$$\overset{m}{J}_p = p^m - (p-1)^m (p-1)_1 + (p-2)^m (p-1)_2 - (p-3)^m (p-1)_3 + \dots$$

bestimmt werden. Verwandeln wir nun jeden in der Reihe

$$\overset{n}{A}_0 Z + \overset{n}{A}_1 DZ + \overset{n}{A}_2 D^2 Z + \dots + \overset{n}{A}_{n-1} D^{n-1} Z$$

vorkommenden Differenzialquotienten nach dem Schema 3) und lassen die hier vorkommenden Grössen $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, ... $\overset{n}{A}_{n-1}$ vor der Hand noch unbestimmt, so erhalten wir

$$\overset{n}{A}_0 Z + \overset{n}{A}_1 DZ + \overset{n}{A}_2 D^2 Z + \dots + \overset{n}{A}_{n-1} D^{n-1} Z$$

$$= \overset{n}{A}_0 Z$$

$$- \overset{n}{A}_1 \left\{ \overset{1}{J}_1 Z + \overset{1}{J}_2 Z^2 \right\}$$

$$+ \overset{n}{A}_2 \left\{ \overset{2}{J}_1 Z + \overset{2}{J}_2 Z^2 + \overset{2}{J}_3 Z^3 \right\}$$

$$- \overset{n}{A}_2 \left\{ \overset{3}{J}_1 Z + \overset{3}{J}_2 Z^2 + \overset{3}{J}_3 Z^3 + \overset{3}{J}_4 Z^4 \right\}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \overset{n}{A}_{n-1} \left\{ \overset{n-1}{J}_1 Z + \overset{n-1}{J}_2 Z^2 + \dots + \overset{n-1}{J}_n Z^n \right\}$$

oder geordnet nach Potenzen von Z

$$= \left\{ \overset{n}{A}_0 - \overset{n}{A}_1 \overset{1}{J}_1 + \overset{n}{A}_2 \overset{2}{J}_1 - \dots + (-1)^{n-1} \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{J}_1 \right\} Z$$

$$- \left\{ \overset{n}{A}_1 \overset{1}{J}_2 - \overset{n}{A}_3 \overset{2}{J}_2 + \overset{n}{A}_3 \overset{3}{J}_2 - \dots + (-1)^n \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{J}_2 \right\} Z^2$$

$$+ \left\{ \overset{n}{A}_2 \overset{2}{J}_3 - \overset{n}{A}_3 \overset{3}{J}_3 + \dots\dots + (-1)^{n-1} \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{J}_3 \right\} Z^3$$

$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (-1)^n \left\{ \overset{n}{A}_{n-2} \overset{n-2}{J}_{n-1} - \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{J}_{n-1} \right\} Z^{n-1}$$

$$+ (-1)^{n-1} \overset{n}{A}_{n-1} \overset{n-1}{J}_n Z^n.$$

Setzt man nun die Coeffizienten von Z, Z^2, Z^3, ... Z^{n-1} sämmtlich $= 0$ und

$$\overset{n}{A}_{n-1}\overset{n-1}{J}_n = 1$$

so hat man n Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der bisher noch unbestimmt gelassenen n Coeffizienten $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$. $\overset{n}{A}_2$, ... $\overset{n}{A}_{n-1}$ und für die so erhaltenen Werthe dieser Grössen gilt nun die Gleichung

$$4)\quad \overset{n}{A}_0 Z + \overset{n}{A}_1 DZ + \overset{n}{A}_2 D^2 Z + \ldots . + \overset{n}{A}_{n-1} D^{n-1} Z$$
$$= (-1)^{n-1} Z^n.$$

Nach Formel 6) in §. 14 hat man ferner wegen $\frac{1}{e^z - 1} = Z$

$$Z = -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{z} + 2\int_0^\infty \frac{\sin zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

und hieraus ergiebt sich durch successive partielle Differenziationen in Beziehung auf z,

$$DZ = -\frac{1}{z^2} + 2\int_0^\infty \frac{t \cos zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

$$D^2 Z = +\frac{1.2}{z^3} - 2\int_0^\infty \frac{t^2 \sin zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

$$D^3 Z = -\frac{1.2.3}{z^4} - 2\int_0^\infty \frac{t^3 \cos zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

$$D^4 Z = +\frac{1.2.3.4}{z^5} + 2\int_0^\infty \frac{t^4 \sin zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

. . . .

und wenn man dies Alles in die Gleichung 4) substituirt, so verwandelt sich die letztere in

$$(-1)^{n-1} Z^n = -\tfrac{1}{2}\overset{n}{A}_0 + \overset{n}{A}_0 \frac{1}{z} - 1.\overset{n}{A}_1 \frac{1}{z^2} + 1.2.\overset{n}{A}_2 \frac{1}{z^3} + \ldots ..$$
$$\ldots . + (-1)^{n-1} 1.2..(n-1)\overset{n}{A}_{n-1} \frac{1}{z^n}$$
$$+ 2\int_0^\infty \frac{\sin zt\, dt}{e^{2\pi t} - 1}\left\{\overset{n}{A}_0 - \overset{n}{A}_2 t^2 + \overset{n}{A}_4 t^4 - \ldots ...\right\}$$

Digitized by Google

$$+ 2\int_0^\infty \frac{\cos zt\,dt}{e^{2\pi t}-1}\left\{\overset{n}{A}_1 t - \overset{n}{A}_3 t^3 + \overset{n}{A}_5 t^5 - \dots\dots\right\}$$

hier wollen wir zur Abkürzung $1.2.3\dots m$ mit m' bezeichnen

$$5)\quad \overset{n}{A}_0 - \overset{n}{A}_2 t^2 + \overset{n}{A}_4 t^4 - \overset{n}{A}_6 t^6 + \dots = T_0$$

$$6)\quad \overset{n}{A}_1 t - \overset{n}{A}_3 t^3 + \overset{n}{A}_5 t^5 - \overset{n}{A}_7 t^7 + \dots = T_1$$

setzen und die ganze Gleichung mit $(-1)^{n-1}$ multipliziren. Vermöge des Werthes von Z wird dann

$$\frac{1}{(e^z-1)^n}$$

$$= (n-1)'\overset{n}{A}_{n-1}\frac{1}{z^n} - (n-2)'\overset{n}{A}_{n-2}\frac{1}{z^{n-1}} + \dots + (-1)^n 1'\overset{n}{A}_1\frac{1}{z^2}$$

$$+ (-1)^{n-1}\overset{n}{A}\frac{1}{z} + \frac{(-1^n}{2}\overset{n}{A}_0$$

$$+ (-1)^{n-1}2\int_0^\infty \frac{\sin zt\,dt}{e^{2\pi t}-1}T_0 + (-1)^{n-1}2\int_0^\infty \frac{\cos zt\,dt}{e^{2\pi t}-1}T_1$$

wobei wir um grösserer Symmetrie willen $(-1)^{n-1}0'\overset{n}{A}_0\frac{1}{z}$ für $(-1)^{n-1}\overset{n}{A}_0\frac{1}{z}$ schreiben werden, indem wir unter dem Symbole $0'$ die positive Einheit verstehen. Setzen wir $z = hu$, multipliziren mit $e^{xu}f(u)\,du$ und integriren darauf zwischen den Gränzen $u = a$ und $u = b$, so wird

$$7)\quad \int_a^b \frac{e^{xu}}{(e^{hu}-1)^n} f(u)du = \frac{(n-1)'}{h^n}\overset{n}{A}_{n-1}\int_a^b \frac{1}{u^n} e^{xu}f(u)\,du$$

$$+ \frac{(n-2)'}{h^{n-1}}\overset{n}{A}_{n-2}\int_a^b \frac{1}{u^{n-1}} e^{xu}f(u)\,du$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}0'}{h}\overset{n}{A}_0\int_a^b \frac{1}{u} e^{xu}f(u)\,du$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2}\overset{n}{A}_0\int_a^b e^{xu}f(u)du$$

Digitized by Google

$$+ (-1)^{n-1}2 \int_a^b e^{xu} f(u) du \int_0^\infty \frac{\sin hut\, dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_0$$

$$+ (-1)^{n-1}2 \int_a^b e^{xu} f(u) du \int_0^\infty \frac{\cos hut\, dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_1.$$

Die einfachen Integrale, welche auf der rechten Seite vorkommen, stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$y = \int_a^b \frac{1}{u^m}\, e^{xu} f(u)\, du,$$

worin y den noch unbekannten Werth bezeichnet. Man hat aber

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \int_a^b e^{xu} f(u)\, du \text{ d. i. } = \varphi(x)$$

und mithin

$$y = \int^{(m)} \varphi(x)\, dx^m.$$

Für das erste Doppelintegral in 7) kann man auch, abgesehen vom Coeffizienten, schreiben

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_0 \int_a^b e^{xu} \sin htu\, f(u)\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_0\; \frac{\varphi(x+hti)-\varphi(x-hti)}{2i}$$

und ganz ähnlich für das zweite

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_1 \int_a^b e^{xu} \cos htu\, f(u)\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\; T_1\; \frac{\varphi(x+hti)+\varphi(x-hti)}{2}$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ ist. Nach allen diesen Substitutionen erhält man aus No. 7)

$$\int_a^b \frac{e^{xu}}{(e^{hu}-1)^n}\, f(u)\, du$$

Digitized by Google

$$= \frac{(n-1)'}{h^n} \overset{n}{A}_{n-1} \int^{(n)} \varphi(x)\, dx^n - \frac{(n-2)'}{h^{n-2}} \overset{n}{A}_{n-2} \int^{(n-1)} \varphi(x) dx^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1} 0'}{h} \overset{n}{A}_0 \int \varphi(x)\, dx + \frac{(-1)^n}{2} \overset{n}{A}_0 \varphi(x)$$

$$+ (-1)^{n-1} 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} T_0 \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ (-1)^{n-1} 2 \int \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} T_1 \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) + \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{2}.$$

Nach Formel 2) ist dies zugleich der Werth von $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$; fügen wir zur Complettirung desselben noch den aus n willkührlichen Constanten gebildeten Ausdruck

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}$$

hinzu, so erhalten wir die allgemeinste Summenformel:

$$8)\ \Sigma^{(n)}\varphi(x) = \frac{(n-1)'}{h^n} \overset{n}{A}_{n-1} \int^{(n)} \varphi(x) dx^n$$

$$- \frac{(n-2)'}{h^{n-1}} \overset{n}{A}_{n-2} \int^{(n-1)} \varphi(x) dx^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1} 0'}{h} \overset{n}{A}_0 \int \varphi(x)\, dx + \frac{(-1)^n}{2} \overset{n}{A}_0 \varphi(x)$$

$$+ (-1)^{n-1} 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} T_0 \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ (-1)^{n-1} 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} T_1 \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) + \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{2}$$

$$+ C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}.$$

Nehmen wir beispielweis $n = 2$, so sind $\overset{2}{A}_0$ und $\overset{2}{A}_1$ aus den Gleichungen

$$\overset{2}{A}_0 - \overset{2}{A}_1 \overset{1}{J}_1 = 0,\ \overset{2}{A}_1 \overset{1}{J}_2 = 1$$

zu bestimmen; da $\overset{1}{J}_1 = 1$, $\overset{1}{J}_2 = 1$ ist, so folgt $\overset{2}{A}_0 = 1$, $\overset{2}{A}_1 = 1$, und mithin

$$\Sigma\Sigma\varphi(x)$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{h^2}\int\!\!\int\varphi(x)dx^2 - \frac{1}{h}\int\varphi(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi(x)$$

$$-2\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\;\frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})-\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$-2\int_0^{\infty}\frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\;\frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})+\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{2}$$

$$+ C_0 + C_1 x.$$

In der Anwendung auf die spezielle Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ giebt dies sehr einfach

$$\Sigma\Sigma\frac{1}{x} = \frac{x(lx-1)}{h^2} - \frac{lx}{h^2} + \frac{1}{2x}$$

$$-2(x-h)\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\;\frac{t}{x^2+h^2t^2} + C_0 + C_1 x$$

wobei man, wie in §. 15, I. leicht eine halbconvergente Reihe für das Integral substituiren könnte. Der vortheilhafte Gebrauch der allgemeinen Formel 8) erhellt hieraus von selbst und an Beispielen dazu wird es nicht fehlen, da die Funktion $\varphi(x)$ nur der Bedingung, endlich zu bleiben, unterworfen ist.

Für die Berechnung der Coeffizienten $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$ etc. verdient noch der Umstand hervorgehoben zu werden, dass man statt der independenten Bestimmungsweise auch eine rekursive anwenden kann, die viel bequemer ist. Differenzirt man nämlich die Gleichung 4) d. i.

$$9)\quad \frac{(-1)^{n-1}}{(e^z-1)^n}$$

$$= \overset{n}{A}_0\frac{1}{e^z-1} + \overset{n}{A}_1 D\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \overset{n}{A}_2 D^2\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \dots\dots$$

$$\dots + \overset{n}{A}_{n-1} D^{n-1}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)$$

und berücksichtigt, dass

$$D\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{(e^z-1)^n}\right\} = \frac{(-1)^n n e^z}{(e^z-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(e^z-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{(e^z-1)^n}$$

ist, so wird zunächst

Digitized by Google

$$\frac{(-1)^n n}{(e^z-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{(e^z-1)^n}$$

$$= \overset{n}{A}_0 D\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \overset{n}{A}_1 D^2\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \ldots + \overset{n}{A}_{n-1} D^n\left(\frac{1}{e^z-1}\right).$$

Hier kann man das zweite Glied der linken Seite nach Formel 9) in eine Reihe verwandeln und wenn man nach Transposition derselben mit n dividirt, so wird

$$\frac{(-1)^n}{(e^z-1)^{n+1}}$$

$$= \overset{n}{A}_0 \frac{1}{e^z-1} + \left(\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{n}\overset{n}{A}_0\right) D\left(\frac{1}{e^z-1}\right)$$

$$+ \left(\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{n}\overset{n}{A}_1\right) D^2\left(\frac{1}{e^z-1}\right) + \ldots\ldots$$

Vergleicht man dies mit demjenigen, was aus der Gleichung 9) hervorgeht, wenn man in ihr $n+1$ an die Stelle von n setzt, so ergeben sich die Relationen

$$\overset{n+1}{A}_0 = \overset{n}{A}_0,\; \overset{n+1}{A}_1 = \overset{n}{A}_1 + \frac{1}{n}\overset{n}{A}_0,\; \overset{n+1}{A}_2 = \overset{n}{A}_2 + \frac{1}{n}\overset{n}{A}_1, \ldots.$$

überhaupt für $p > 0$,

$$10)\quad \overset{n+1}{A}_p = \overset{n}{A}_p + \frac{1}{n}\overset{n}{A}_{p-1}.$$

Setzt man weiter

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2.3..(n-1)} \overset{n}{K}_p$$

wo $\overset{n}{K}_p$ ein noch näher zu bestimmender Coeffizient ist, so geht die vorige Beziehung in die folgende über

$$11)\quad \overset{n+1}{K}_p = n\overset{n}{K}_p + \overset{n}{K}_{p-1}.$$

Dieselbe Relation findet aber auch zwischen den Coeffizienten K in der Reihe

$$u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1) = \overset{n}{K}_1 u + \overset{n}{K}_2 u^2 + \ldots + \overset{n}{K}_n u^n$$

statt, wie man sogleich erkennen wird, wenn man die vorstehende Gleichung mit $n+u$ multiplizirt und dies mit Demjenigen vergleicht, was entsteht, wenn man in ihr $n+1$ für n substituirt. Es sind

Digitized by Google

daher die Coefficienten K identisch mit den Facultätencoefficienten und die Formel 11) führt nun leicht zu der Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7
K_1	1	1	2	6	24	120	720
K_2		1	3	11	50	274	1764
K_3			1	6	35	225	1624
K_4				1	10	85	735
K_5					1	15	175
K_6						1	21
K_7							1

Dividirt man die Zahlen der zweiten Vertikalreihe durch 1, die der dritten durch 1.2, die der vierten durch 1.2.3 etc., so ergiebt sich hieraus die Tabelle der Coefficienten A nämlich

n	1	2	3	4	5	6	7
A_0	1	1	1	1	1	1	1
A_1		1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{147}{60}$
A_2			$\frac{1}{2}$	1	$\frac{35}{24}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{203}{180}$
A_3				$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{49}{48}$
A_4					$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{35}{144}$
A_5						$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{240}$
A_6							$\frac{1}{720}$

welche man mit Hülfe der unter No. 10) verzeichneten Rekursionsformel leicht fortsetzen kann.

Digitized by Google

Digitized by Google

Dritter Theil.

Differenzengleichungen.

Digitized by Google

§. 1.

Allgemeine Begriffe.

Nicht immer sind, wie in dem vorigen Theile, die Differenzen der Funktionen unmittelbar gegeben, so dass es nur einer endlichen Integration bedarf, um von den Differenzen zu den Funktionen selbst zu gelangen; im Gegentheile liegt oft nur eine Relation zwischen der Funktion und ihren Differenzen mit der Aufgabe vor, aus dieser Beziehung die Natur der Funktion zu bestimmen. So ist z. B. unmittelbar einleuchtend, dass die Gleichung

$$\varDelta y = \frac{2h}{x}\, y \text{ oder } y - \frac{x}{2h}\varDelta y = 0$$

nicht für jedes beliebige x und y, sondern nur dann bestehen kann, wenn y eine gewisse noch unbekannte Funktion von x ausmacht; diese Funktion wäre in dem vorliegenden Falle leicht zu errathen, sie ist nämlich $y = x(x+h)$, wovon man sich *a posteriori* leicht überzeugen kann, es versteht sich aber von selbst, dass die Wissenschaft sich nicht auf ein Rathen oder Probiren einlassen darf, sondern statt dessen ein geordnetes Verfahren zur Auflösung derartiger Aufgaben zu substituiren hat. Gleichungen von der obigen Form, deren allgemeines Schema

$$1)\quad \Phi(y\ ,\ \varDelta y\ ,\ \varDelta^2 y\ ,\ \ldots\ \varDelta^n y) = 0$$

darstellt, nennt man **Differenzengleichungen**, diejenige Funktion $y = f(x)$, welche die Gleichung erfüllt, das **Integral der Differenzengleichung** und das Verfahren, wodurch man zur Auflösung der Gleichung, d. h. zur Kenntniss von $f(x)$ gelangt, die **Integration der Differenzengleichung**. Die verschiedenen Mittel nun auseinander zu setzen, durch welche man die Integration der man-

Digitized by Google

nichfaltigen Differenzengleichungen bewerkstelligt, ist der Zweck dieses dritten und letzten Theiles der Lehre von den Differenzen und Summen.

Zunächst verdient die Bemerkung beachtet zu werden, dass man aus der Gleichung 1) die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... wegschaffen kann, indem man sich errinnert, dass

$$\Delta y = y_1 - y\,,$$
$$\Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y\,,$$
$$\Delta^3 y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y\,,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

ist, wobei wie schon früher y_s die Funktion $f(x + sh)$ bezeichnet.

Die Gleichung 1) nimmt dann die Form

$$2)\quad \Psi(y\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\,y_3\,,\,\ldots\,y_n) = 0$$

an; so z. B. geht unsere beispielweis angeführte Gleichung in

$$y_1 - y = \frac{2h}{x}\,y \text{ oder } y_1 = \frac{x+2h}{x}\,x$$

d. h.

$$f(x+h) = \frac{x+2h}{x}\,f(x)$$

über, aus welcher sich die unbekannte Funktion $y = f(x)$ leicht bestimmen lässt. Setzt man nämlich für x der Reihe nach a, $a+h$, $a+2h$, ... $a+\overline{m-1}h$, so ergiebt sich die Reihe von Gleichungen

$$f(a+h) = \frac{a+2h}{a}\,f(a)$$

$$f(a+2h) = \frac{a+3h}{a+h}\,f(a+h)$$

$$f(a+3h) = \frac{a+4h}{a+2h}\,f(a+2h)$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$f(a+mh) = \frac{a+\overline{m+1}h}{a+\overline{m-1}h}\,f(a+\overline{m-1}h).$$

Durch Substitution von jeder Gleichung in die darauf folgende erhält man hieraus

$$f(a+h) = \frac{a+2h}{a}\,f(a)$$

Digitized by Google

$$f(a+2h) = \frac{(a+2h)(a+3h)}{a(a+h)} f(a)$$

$$f(a+3h) = \frac{(a+2h)(a+3h)(a+4h)}{a(a+h)(a+2h)} f(a)$$

. . . .

$$f(a+mh) = \frac{(a+2h)(a+3h)\dots(a+mh)(a+\overline{m+1}h)}{a(a+h)(a+2h)\dots(a+\overline{m-1}h)} f(a)$$

wo sich im letzten Gliede eine bedeutende Hebung vornehmen lässt, nach welcher

$$f(a+mh) = \frac{(a+mh)(a+mh+h)}{a(a+h)} f(a)$$

übrig bleibt. Setzen wir endlich $a + mh = x$ und den constanten Faktor

$$\frac{f(a)}{a(a+h)} = C$$

so ist $f(x) = Cx(x+h)$, womit das Integral unserer Gleichung gefunden ist. Etwas Aehnliches lässt sich mit der Gleichung 2) vornehmen, wenn man sie so aufgelöst denkt, dass y_n auf einer Seite allein steht, wodurch man ein Resultat von der Form

$$y_n = \psi(y, y_1, \dots y_{n-1})$$

erhält. Man hat dann, wenn der Reihe nach $x+h, x+2h, x+3h, \dots$ für x gesetzt wird

$$y_{n+1} = \psi(y_1, y_2, y_3, \dots\dots y_n)$$
$$y_{n+2} = \psi(y_2, y_3, y_4, \dots y_{n+1})$$
$$y_{n+3} = \psi(y_3, y_4, y_5, \dots y_{n+2})$$

. . . .

Denkt man sich jede Gleichung in die nächstfolgende substituirt, so erhält man die Grössenreihe

$$y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots\dots$$

ausgedrückt durch $y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ und das allgemeine Glied dieser Reihe etwa y_{n+m} giebt das Integral unserer Differenzengleichung, sobald man sich für $x + (n+m)h$ wieder kurz x geschrieben denkt. Dabei bleiben aber die Grössen $y, y_1, \dots y_{n-1}$ unbestimmt, da sie nicht von m abhängen, und bilden ebensoviel, d. h. n, willkührliche Constanten.

Digitized by Google

Das Integral einer Differenzengleichung enthält also so viele willkührliche Constanten, als der Ordnungsexponent der höchsten in der Gleichung vorkommenden Differenz Einheiten zählt.

An einer Differenzengleichung unterscheidet man endlich noch die Ordnung und den Grad derselben. Ist nämlich die höchste vorkommende Differenz von y die n^{te}, so sagt man, die Gleichung sei von der n^{ten} Ordnung; enthält ferner die Funktion Φ auch Potenzen oder Produkte von y, Δy, $\Delta^2 y$ etc. und ist m der höchste vorhandene Potenzenexponent, so ist m der Grad der Differenzengleichung. So ist z. B. die Gleichung $xy - \Delta^5 y = 0$ von der 5ten Ordnung und vom ersten Grade, dagegen die Gleichung $y^2 + (\Delta y)^3 = 0$ von der ersten Ordnung und vom 3ten Grade. Dasselbe gilt in Bezug auf die Gleichung 2), welche, wie leicht zu sehen ist, immer denselben Grad und dieselbe Ordnung besitzt, wie die ursprüngliche Gleichung 1).

§. 2.

Integration der Differenzengleichungen ersten Grades und erster Ordnung.

Nach den am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen bildet die Gleichung

$$p + qy + r\Delta y = 0$$

worin p, q, r entweder constant oder nur von x abhängig sind, das allgemeine Schema aller Differenzengleichungen ersten Grades und erster Ordnung; für $\Delta y = y_1 - y$ verwandelt sich dasselbe in

$$y_1 = \frac{r-q}{r} y - \frac{p}{r}$$

wobei wir zur Abkürzung $\frac{r-q}{r}$ mit P und $-\frac{p}{r}$ mit Q bezeichnen. Um aber deutlicher hervorzuheben, dass in der Gleichung

$$y_1 = Py + Q$$

P, Q und y Funktionen von x sind, wollen wir P_x, Q_x, y_x für jene Grössen schreiben, so dass z. B. y_x der Repräsentant der Gleichung

Digitized by Google

$y = f(x)$ ist; an die Stelle des $y_1 = f(x+h)$ tritt dann y_{x+h} und nun ist

$$1)\quad y_{x+h} = P_x y_x + Q_x$$

die zu integrirende Differenzengleichung.

Nehmen wir der Reihe nach $x = a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ a+\overline{m-1}h$, so entsteht folgende Reihe von Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_{a+h} &= P_a y_a + Q_a \\
y_{a+2h} &= P_{a+h} y_{a+h} + Q_{a+h} \\
y_{a+3h} &= P_{a+2h} y_{a+2h} + Q_{a+2h} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{a+mh} &= P_{a+(m-1)h} y_{a+(m-1)h} + Q_{a+(m-1)h}.
\end{aligned}$$

Durch Substitution jeder Gleichung in die darauf folgende gehen diese Gleichungen in die nachstehenden über

$$\begin{aligned}
y_{a+h} &= P_a y_a + Q_a \\
y_{a+2h} &= P_a P_{a+h} y_a + P_{a+h} Q_a + Q_{a+h} \\
y_{a+3h} &= P_a P_{a+h} P_{a+2h} y_a + P_{a+h} P_{a+2h} Q_a + P_{a+2h} Q_{a+h} + Q_{a+2h} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}
y_{a+mh} = {} & P_a P_{a+h} P_{a+2h} \ldots . P_{a+(m-1)h} y_a \\
& + P_{a+h} P_{a+2h} \ldots . P_{a+(m-1)h} Q_a \\
& + P_{a+2h} P_{a+3h} \ldots . P_{a+(m-1)h} Q_{a+h} \\
& + P_{a+3h} P_{a+4h} \ldots . P_{a+(m-1)h} Q_{a+2h} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + P_{a+(m-1)h} Q_{a+(m-2)h} \\
& + Q_{a+(m-1)h}
\end{aligned}$$

d. i. wenn $a + mh = x$ und das constante $y_a = C$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
2)\quad y_x = {} & P_a P_{a+h} P_{a+2h} \ldots . P_{x-h}\, C \\
& + P_{a+h} P_{a+2h} \ldots . P_{x-h} Q_a \\
& + P_{a+2h} P_{a+3h} \ldots . P_{x-h} Q_{a+h} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + P_{x-h} Q_{x-2h} \\
& + Q_{x-h}.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Hierin ist a nur der einen Bedingung unterworfen, dass wegen $a + mh = x$ der Quotient $\frac{x-a}{h}$ eine ganze positive Zahl m sein muss, sonst aber kann a willkührlich gewählt werden. Bezeichnet man das aus m Faktoren bestehende Produkt

$$P_a P_{a+h} P_{a+2h} \ldots . P_{x-h}$$
$$= P_{x-h} P_{x-2h} P_{x-3h} \ldots . . P_{x-mh}$$

zur Abkürzung mit $\overset{m}{[P_{x-h}]}$, so kann man y_x unter der kürzeren Form

$$3)\quad y_x = \overset{m}{[P_{x-h}]}\, C + \overset{m-1}{[P_{x-h}]}\, Q_a + \overset{m-2}{[P_{x-h}]}\, Q_{a-h} + \ldots . .$$
$$\ldots + \overset{2}{[P_{x-h}]}\, Q_{x-2h} + \overset{0}{[P_{x-h}]}\, Q_{x-h}$$

darstellen, wobei man unter $\overset{0}{[P_{x-h}]}$ die positive Einheit verstehen muss. Berücksichtigt man noch, dass die Gleichungen

$$P_{a+h} P_{a+2h} \ldots P_{a+(m-1)h} = \frac{P_a P_{a+h} \ldots . P_{a+(m-1)h}}{P_a}$$

$$P_{a+2h} P_{a+3h} \ldots P_{a+(m-1)h} = \frac{P_a P_{a+h} \ldots . P_{a+(m-1)h}}{P_a P_{a+h}}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

d. i. nach unserer Bezeichnung

$$\overset{m-1}{[P_{x-h}]} = \frac{\overset{m}{[P_{x-h}]}}{\overset{1}{[P_a]}}$$

$$\overset{m-2}{[P_{x-h}]} = \frac{\overset{m}{[P_{x-h}]}}{\overset{2}{[P_{a+h}]}}$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

statt finden, so kann man dem Ausdrucke 3) die Form

$$y_x = \overset{m}{[P_{x-h}]} \left\{ C + \frac{Q_a}{\overset{1}{[P_a]}} + \frac{Q_{a+h}}{\overset{2}{[P_{a+h}]}} + \frac{Q_{a+2h}}{\overset{3}{[P_{a+2h}]}} + \ldots . . \right.$$
$$\left. \ldots . . + \frac{Q_{a+(m-1)h}}{\overset{m}{[P_{a+(m-1)h}]}} \right\}$$

geben, die sich mittelst eines Summenzeichens kürzer ausdrücken lässt. Es ist nämlich zufolge der Definition, welche wir von dem bestimmten endlichen Integrale gegeben haben

Digitized by Google

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}}\psi(x)$$

$$= \psi(a) + \psi(a+h) + \psi(a+2h) + \ldots. + \psi(a+\overline{m-1}h)$$

wobei $b = a + mh$ sein muss. Für

$$\psi(x) = \frac{Q_x}{[P_x]^{(x-a+h):h}}$$

ergiebt sich hieraus sogleich

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}} \frac{Q_x}{[P_x]^{(x-a+h):h}}$$

$$= \frac{Q_a}{[P_a]^1} + \frac{Q_{a+h}}{[P_{a+h}]^2} + \ldots.. + \frac{Q_{a+(m-1)h}}{[P_{a+(m-1)h}]^m}.$$

Die rechte Seite stimmt mit der in dem Werthe von y_x vorkommenden Reihe überein, wobei nur beachtet werden muss, dass hier $a + mh = b$, dort aber $= x$ ist. Schreiben wir daher x für b und $(x - a) : h$ für m, so ist jetzt

$$4) \quad y_x = [P_{x-h}]^{(x-a):h} \left\{ C + \overset{x}{\underset{a}{\Sigma}} \frac{Q_x}{[P_x]^{(x-a+h):h}} \right\}.$$

Endlich kann man noch an dem bestimmten endlichen Integrale, welches in der Parenthese vorkommt, die Gränzen streichen. Denn nach einer zweiten Auffassungsweise des bestimmten endlichen Integrales ist für $\Sigma\psi(x) = \Psi(x)$

$$\overset{b}{\underset{a}{\Sigma}}\psi(x) = \Psi(b) - \Psi(a)$$

mithin

$$\overset{x}{\underset{a}{\Sigma}}\psi(x) = \Psi(x) - \Psi(a)$$

und wenn wir dies auf den obigen Fall anwenden, so können wir die constante Grösse $\Psi(a)$ mit in die Constante C einrechnen, und blos $C + \Psi(x) = C + \Sigma\psi(x)$ für den Inhalt der Parenthese setzen. Wir haben dann

$$5) \quad y_x = [P_{x-h}]^{(x-a):h} \left\{ C + \Sigma \frac{Q_x}{[P_x]^{(x-a+h):h}} \right\}$$

als vollständiges Integral unser Differenzengleichung 1).

Digitized by Google

Bei den meisten Anwendungen, die man von der Integration der Differenzengleichungen macht, beschränkt man sich übrigens auf den Fall $h = 1$ und verlangt nur ganze positive Werthe von x; man kann dann einfach $a = 0$ nehmen und hat so

$$6)\quad y_x = \overset{x}{[P_{x-1}]} \left\{ C + \Sigma \frac{Q_x}{\underset{x+1}{[P_x]}} \right\}.$$

Um gleich ein paar praktisch brauchbare Beispiele zu dieser Formel zu haben, wollen wir die in die Differentialrechnung gehörende Aufgabe der independenten Bestimmung von

$$\frac{d^n Arcsin\, x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$

mit ihrer Hülfe lösen. Bezeichnen wir nämlich $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zur Abkürzung mit u, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} \text{ u, s. w.}$$

woraus man ersehen kann, dass im Allgemeinen

$$7)\quad \frac{d^nu}{dx^n} = \frac{A_nx^n + B_nx^{n-2} + C_nx^{n-4} + \ldots}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

zu setzen ist, A_n, B_n, C_n, .. gewisse zum Ordnungsindex n gehörige Coefficienten sind, deren Bildungsgesetz wir zu bestimmen haben. Eine nochmalige Differenziation der Gleichung 7) giebt nun

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} =$$

$$\frac{(n+1)A_nx^{n+1} + \left.\begin{matrix}(n+3)B_n\\ +\quad nA_n\end{matrix}\right| x^{n-1} + \left.\begin{matrix}(n+5)C_n\\ +(n-2)B_n\end{matrix}\right| x^{n-3} + \left.\begin{matrix}(n+7)D_n\\ +(n-4)C_n\end{matrix}\right| x^{n-5} \begin{matrix}+\ldots\\+\ldots\end{matrix}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

und wenn man dies mit der Gleichung

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^{n-1} + C_{n+1}x^{n-3} + \ldots}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

zusammenhält, welche aus 7) hervorgeht, indem man $n+1$ an die Stelle von n treten lässt, so ergeben sich folgende Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (n+1)A_n \\ B_{n+1} &= (n+3)B_n + nA_n \\ C_{n+1} &= (n+5)C_n + (n-2)B_n \\ D_{n+1} &= (n+7)D_n + (n-4)C_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche sämmtlich unter Form

$$y_{x+1} = P_x y_x + Q_x \text{ oder } y_{n+1} = P_n y_n + Q_n$$

stehen und daher nach Formel 6) integrirt werden können, indem man n für x schreibt. Das Integral der ersten Differenzengleichung ist nun für $P_n = n + 1$, $Q_n = 0$

$$A_n = [n]^n C'$$

wo C' die willkührliche Constante bedeutet; letztere bestimmt sich aus der Bemerkung, dass für $n = 1$, $A_n = A_1 = 1$ sein muss, woraus $C' = 1$ und einfacher

$$A_n = [n]^n$$

folgt. Substituiren wir diesen Werth in die zweite Differenzengleichung, so verwandelt sich dieselbe in

$$B_{n+1} = (n+3)B_n + n[n]^n$$

und ihr Integral ist nach No. 6)

$$B_n = [n+2]^n \left\{ C'' + \Sigma \frac{n[n]^n}{[n+3]^{n+1}} \right\}$$

$$= [n+2]^n \left\{ C'' + 1.2.\Sigma \frac{n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \right\}.$$

Man hat nun weiter

$$\Sigma \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \Sigma \left[\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$$

$$= -\frac{1}{n+2} + \tfrac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

und wenn man dies in den Werth von B_n substituirt,

$$B_n = [n+2]^n \left\{ C'' - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}.$$

Die Constante C'' bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $n = 1$, $B_n = C_1 = 0$ werden muss; man erhält daraus $C'' = \frac{1}{2}$, und wenn man jetzt Alles zusammenrechnet

Digitized by Google

$$B_n = [n+2]^{n} \, \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}$$

und wenn man bemerkt, dass

$$[n+2]^{n} = (n+2)(n+1)n \ldots 4.3 = (n+2)(n+1)\frac{[n]^{n}}{1.2}$$

ist, so verwandelt sich die vorige Gleichung in die einfachere

$$B_n = [n]^{n} \, \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} = [n]^{n} \, \tfrac{1}{2} n_2$$

wobei die kurze Bezeichnung der Binomialkoefficienten in Anwendung gebracht worden ist.

Substituiren wir dies in die Differenzengleichung für C_n, so verwandelt sich dieselbe in

$$C_{n+1} = (n+5)C_n + (n-2)[n]^{n} \tfrac{1}{2} n_2$$

und man findet aus ihr nach demselben Verfahren

$$C_n = [n]^{n} \frac{1.3}{2.4} n_4$$

und aus den bisherigen Coefficienten A_n, B_n, C_n wird man nun leicht das Bildungsgesetz aller Coefficienten entnehmen können. Man hat nämlich

$$\frac{d^n(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n}$$

$$= \frac{[n]^{n}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left\{ x^n + \tfrac{1}{2} n_2 x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4} n_4 x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} n_6 x^{n-6} + \ldots \right\}$$

und wenn man $n-1$ an die Stelle von n treten lässt, so giebt diese Formel zugleich den Werth von

$$\frac{d^n Arcsin\, x}{dx^n}$$

und zwar in derjenigen Gestalt, wie er von *Euler* zuerst bekannt gemacht wurde.

Digitized by Google

§. 3.

Differenzengleichungen ersten Grades und beliebiger Ordnung.

Sowie die Gleichung $y_{x+h} = P_x y_x + Q_x$ oder einfacher für $h = 1$ *), $y_{x+1} - P_x y_x = Q_x$ das allgemeine Schema der Differenzengleichungen ersten Grades und erster Ordnung ist, so stellt die Gleichung

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} + \ldots + T_x y_{x+1} + U_x y_x = V_x$$

die allgemeine Form der Differenzengleichuug ersten Grades und n^{ter} Ordnung dar. Da es keine allgemeine Methode giebt, wodurch man in jedem Falle zu dem Integrale y_x in derselben gelangen könnte, so wollen wir die verschiedenen Verfahrungsweisen, mittelst deren man in diesem oder jenem speciellen Falle zum Ziele gelangt, einzeln nach einander vortragen.

Am leichtesten ist die Integration der obigen Gleichung, wenn die Coefficienten $P_x, Q_x, \ldots U_x$ von x unabhängige Grössen, also Constanten sind und zugleich $V_x = 0$, also einfach

1) $y_{x+n} + P y_{x+n-1} + Q y_{x+n-2} + \ldots + T y_{x+1} + U y_x = 0$

ist. Man setze nämlich in diesem Falle $y_x = \lambda^x$, wo λ eine vor der Hand noch unbestimmte Grösse bezeichnet, so wird

$$\lambda^{x+n} + P\lambda^{x+n-1} + Q\lambda^{x+n-2} + \ldots + T\lambda^{x+1} + U\lambda^x = 0$$

oder nach Division mit λ^x,

2) $\lambda^n + P\lambda^{n-1} + Q\lambda^{n-2} + \ldots + T\lambda + U = 0.$

In dieser Gleichung kommt gar kein x mehr vor und da $P, Q \ldots T, U$ bekannt sind, so ist λ die einzige Unbekannte, deren Werth man jetzt

---

*) Es ist leicht zu sehen, dass diese Spezialisirung, von der wir künftig immer Gebrauch machen werden, die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Denn wenn sich x um 1 ändert, so nimmt hx um h zu; setzt man also am Ende einer unter der Voraussetzung des Inkrementes 1 geführten Rechnung hx für x oder $x' = x$, wo $x' = hx$ ist, so beziehen sich die neuen Formeln auf den Fall, wo sich die neue Variable x' um h ändert; lässt man nachher den Accent weg, so ist die Allgemeinheit wieder hergestellt.

Digitized by Google

durch Auflösung der obigen algebraischen Gleichung erhält. Nennen wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die n Wurzeln derselben, so sind

$$y_x = \lambda_1^x, \lambda_2^x, \lambda_3^x, \ldots \ldots \lambda_n^x$$

ebensoviele einzelne Integrale der Gleichung 1). Nun ist aber leicht zu sehen, dass auch der allgemeine Ausdruck

$$3) \quad y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + \ldots + C_n\lambda_n^x$$

worin $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkührliche Constanten bezeichnen, die Gleichung 1) befriedigt und daher bildet derselbe das **allgemeine** Integral der in Rede stehenden Differenzengleichung.

Zwei Fälle bedürfen hier noch einer besonderen Untersuchung, nämlich das Vorkommen von imaginären und ebenso das von gleichen Wurzeln in No. 2). Im ersten Falle braucht man sich nur zu erinnern, dass die imaginären Wurzeln immer paarweis vorhanden sind, also eine, etwa λ_1 von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und dann eine andere, etwa λ_2, von der Form $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ sein muss. Setzen wir aber, was bekanntlich immer angeht,

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1} = \varrho(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$$
$$\lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1} = \varrho(\cos\vartheta - \sqrt{-1}\sin\vartheta)$$

so wird

$$C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$
$$= C_1\varrho^x(\cos x\vartheta + \sqrt{-1}\sin x\vartheta) + C_2\varrho^x(\cos x\vartheta - \sqrt{-1}\sin x\vartheta)$$
$$= (C_1 + C_2)\varrho^x\cos x\vartheta + \sqrt{-1}(C_1 - C_2)\varrho^x\sin x\vartheta$$

oder für $C_1 + C_2 = c_1$, $\sqrt{-1}(C_1 - C_2) = c_2$

$$4) \quad C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x = c_1\varrho^x\cos x\vartheta + c_2\varrho^x\sin x\vartheta$$

und dies wäre also an die Stelle der zwei ersten Glieder in 3) zu setzen, sobald λ_1 und λ_2 zwei conjugirte imaginäre Wurzeln sind.

Kommen in der Gleichung 2) gleiche Wurzeln vor, etwa $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist der in 3) verzeichnete Ausdruck nicht mehr das **allgemeine** Integral der gegebenen Differenzengleichung; denn es geht derselbe in

$$y_x = (C_1 + C_2)\lambda_1^x + C_3\lambda_3^x + C_4\lambda_4^x + \ldots + C_n\lambda_n^x$$

über und wenn wir $C_1 + C_2$ mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen, so enthält y_x nicht mehr n, sondern nur $n - 1$ willkührliche

Digitized by Google

Constanten, ist also kein allgemeines Integral. Indessen kann man sich leicht helfen; sei nämlich zunächst $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, so hindert nichts

$$C_1 = C' - \frac{C''}{\delta}, \; C_2 = \frac{C''}{\delta}$$

zu setzen, wo C' und C'' zwei neue willkührliche Constanten bezeichnen; es wird dann

$$C_1\lambda_1{}^x + C_2\lambda_2{}^x = \left(C' - \frac{C''}{\delta}\right)\lambda_1{}^x + \frac{C''}{\delta}(\lambda_1 + \delta)^x$$

$$= C'\lambda_1{}^x + C''\frac{(\lambda_1 + \delta)^x - \lambda_1{}^x}{\delta}$$

und wenn nun δ bis zur Null abnimmt, also $\lambda_1 = \lambda_2$ wird, so ergiebt sich

$$5)\quad C_1\lambda_1{}^x + C_2\lambda_2{}^x = C'\lambda_1{}^x + C''x\lambda_1{}^{x-1}.$$

Wären drei gleiche Wurzeln vorhanden $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so nehme man vorerst $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, $\lambda_3 = \lambda_1 + 2\delta$ und

$$C_1 = C' - \frac{C''}{\delta} + \frac{C'''}{\delta^2}$$

$$C_2 = \frac{C''}{\delta} - \frac{2C'''}{\delta^2}$$

$$C_3 = \frac{C'''}{\delta^2}$$

so wird nach diesen Substitutionen

$$C_1\lambda_1{}^x + C_2\lambda_2{}^x + C_3\lambda_3{}^x$$

$$= C'\lambda_1{}^x + C''\frac{(\lambda_1 + \delta)^x - \lambda_1{}^x}{\delta} + C'''\frac{(\lambda_1 + 2\delta)^x - 2(\lambda_1 + \delta)^x + \lambda_1{}^x}{\delta^2}$$

und wenn man jetzt δ in Null übergehen, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ werden lässt, so kommt

$$6)\quad C_1\lambda_1{}^x + C_2\lambda_2{}^x + C_3\lambda_3{}^x$$

$$= C'\lambda_1{}^x + C''\frac{x}{1}\lambda_1{}^{x-1} + C'''\frac{x(x-1)}{1.2}\lambda_1{}^{x-2}.$$

Bei vier gleichen Wurzeln würde man zunächst $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, $\lambda_3 = \lambda_1 + 2\delta$, $\lambda_4 = \lambda_1 + 3\delta$ setzen und statt der willkührlichen Constanten C_1, C_2, C_3, C_4 vier neue willkührliche Constanten C', C'', C''', C'''' der Art einführen, dass

Digitized by Google

$$C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + C_4\lambda_4^x$$

$$= C'\lambda_1^x + C''\,\frac{(\lambda_1+\delta)^x-\lambda_1^x}{\delta} + C'''\,\frac{(\lambda_1+3\delta)^x-2(\lambda_1+\delta)^x+\lambda_1^x}{\delta^2}$$

$$+ C''''\,\frac{(\lambda_1+3\delta)^x-3(\lambda_1+2\delta)^x+3(\lambda_1+\delta)^x-\lambda_1^x}{\delta^3}$$

wird und nun δ bis zur Gränze Null abnehmen lassen. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ wird dann

$$C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + C_3\lambda_3^x + C_4\lambda_4^x$$

$$= C'\lambda_1^x + C''\,\frac{x}{1}\,\lambda_1^{x-1} + C'''\,\frac{x(x-1)}{1.2}\,\lambda_1^{x-2}$$

$$+ C''''\,\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,\lambda_1^{x-3}.$$

Wie man auf diese Weise weiter gehen kann, erhellt leicht. Um endlich die bisherigen Bemerkungen an einem Beispiele deutlich zu machen, wählen wir die Differenzengleichung

8) $y_{x+4} - 8y_{x+3} + 23y_{x+2} - 30y_{x+1} + 18y_x = 0$

Die Substitution $y_x = \lambda^x$ führt hier zu der algebraischen Gleichung

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 23\lambda^2 - 30\lambda + 18 = 0$$

oder

$$(\lambda^2-2\lambda+2)(\lambda-3)^2 = 0$$

welche folgende 4 Wurzeln besitzt:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 3.$$

Da λ_1 und λ_2 conjugirte imaginäre Wurzeln sind, deren Modulus $\varrho = \sqrt{2}$ und deren Argument $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ist, so haben wir nach No. 4) statt $C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$ den Ausdruck

$$c_1\sqrt{2}^x\cos\frac{\pi x}{4} + c_2\sqrt{2}^x\sin\frac{\pi x}{4}$$

zu substituiren. Weil ferner zwei gleiche Wurzeln $\lambda_3 = \lambda_4$ vorhanden sind, so ist No. 5) zufolge statt $C_3\lambda_3^x + C_4\lambda_4^x$ der Ausdruck

Digitized by Google

$$C'\lambda_3{}^x + C''x\lambda_3{}^{x-1} = C'3^x + C''x3^{x-1}$$

zu setzen, wobei wir der Symmetrie wegen c_3 und c_4 für C' und C'' schreiben wollen. Das vollständige Integral der Differenzengleichung 8) ist nun

$$9)\quad y_x = c_1\sqrt{2^x}\ cos\ \frac{\pi x}{4} + c_2\sqrt{2^x}\ sin\frac{\pi x}{4} + c_3 3^x + c_4 x3^{x-1}$$

und man wird sich jetzt auch *a posteriori* leicht überzeugen, dass jede einzelne der Funktionen

$$\sqrt{2^x} cos\frac{\pi x}{4}\ ,\ \sqrt{2^x}\ sin\ \frac{\pi x}{4}\ ,\ 3^x\ ,\ x3^{x-1}.$$

Die Gleichung 8) befriedigt und mithin der in 9) verzeichnete Ausdruck der allgemeinste ist, welcher dieselbe Eigenschaft besitzt.

§. 4.

Fortsetzung.

Wir kehren jetzt wieder zu der allgemeinen Gleichung

$$1)\quad y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} + \dots + T_x y_{x+1} + U_x y_x = V_x$$

zurück und zwar um einige Betrachtungen darüber anzustellen, welche eine Verallgemeinerung der im vorigen Paragraphen benutzten Integrationsmethode zum Zwecke haben.

Untersuchen wir zunächst den einfachen Fall, in welchem statt der rechten Seite die Null steht, also die Gleichung von der Form ist

$$2)\quad z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} + \dots + T_x z_{x+1} + U_x z_x = 0$$

so erhellt leicht, dass es hier nur darauf ankommen würde, n verschiedene spezielle Funktionen, etwa

$$\overset{1}{z}_x\ ,\ \overset{2}{z}_x\ ,\ \overset{3}{z}_x\ ,\ \dots\dots\ \overset{n}{z}_x$$

aufzufinden, welche der Gleichung Genüge leisten. Denn wenn jedes dieser sogenannten partikulären Integrale die Differenzengleichung befriedigt, so ist dies auch mit dem Ausdrucke

$$3)\quad z_x = \overset{1}{C}\overset{1}{z}_x + \overset{2}{C}\overset{2}{z}_x + \overset{3}{C}\overset{3}{z}_x + \dots + \overset{n}{C}\overset{n}{z}_x$$

der Fall, wie man durch dessen Substitution gleich finden wird, und folglich bildet der vorstehende Ausdruck das allgemeine Integral der Gleichung 2), weil derselbe n willkührliche Constanten

Digitized by Google

$$\overset{1}{C}\,,\ \overset{2}{C}\,,\ \overset{3}{C}\,,\ \ldots\ \overset{n}{C}\,,$$

in sich enthält. Ist man nun auf irgend eine Weise zu den partikulären Integralen der Gleichung 2) und von da weiter zu dem allgemeinen Integrale derselben gelangt, so hat es auch keine wesentliche Schwierigkeit, die Gleichung 1) zu integriren, und zwar auf folgende Weise:

Da die ursprüngliche Differenzengleichung von der in No. 2) verzeichneten nur in dem einen Gliede V_x differirt, die Form des Integrales von No. 2) aber bekannt ist, so liegt der Gedanke sehr nahe, einen Versuch darüber zu machen, ob man der Gleichung 1) nicht durch eine dem Integrale z_x ganz ähnliche Form genügen könne. Wir setzen daher hypothetisch

$$4)\quad y_x = \overset{1}{F}_x\overset{1}{z}_x + \overset{2}{F}_x\overset{2}{z}_x + \overset{3}{F}_x\overset{3}{z}_x + \ldots + \overset{n}{F}_x\overset{n}{z}_x$$

worin $\overset{1}{z}_x$, $\overset{2}{z}_x$, … $\overset{n}{z}_x$ wie in No. 3) die partikulären Auflösungen der Gleichung 2), an die Stelle von den Constanten $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$, … $\overset{n}{C}$ aber ebensoviele noch unbestimmte Funktionen von x gesetzt worden sind. Hieraus ergiebt sich nun zunächst, wenn $x+1$ für x substituirt wird

$$4^*\quad y_{x+1} = \overset{1}{F}_{x+1}\overset{1}{z}_{x+1} + \overset{2}{F}_{x+1}\overset{2}{z}_{x+1} + \ldots + \overset{n}{F}_{x+1}\overset{n}{z}_{x+1}$$

wobei wir statt F_{x+1} überhaupt $F_x + \varDelta F_x$ schreiben wollen. Es wird dann

$$y_{x+1} = \overset{1}{F}_x\overset{1}{z}_{x+1} + \overset{2}{F}_x\overset{2}{z}_{x+1} + \ldots + \overset{n}{F}_x\overset{n}{z}_{x+1}$$
$$+ \overset{1}{z}_{x+1}\varDelta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+1}\varDelta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+1}\varDelta\overset{n}{F}_x$$

hier setzen wir um zu vereinfachen

$$5)\quad \overset{1}{Z}_{x+1}\varDelta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+1}\varDelta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+1}\varDelta\overset{n}{F}_x = 0$$

so dass nur übrig bleibt

$$5^*\quad y_{x+1} = \overset{1}{F}_x\overset{1}{z}_{x+1} + \overset{2}{F}_x\overset{2}{z}_{x+1} + \ldots + \overset{n}{F}_x\overset{n}{z}_{x+1}.$$

Lassen wir wieder x um eine Einheit zunehmen und schreiben wie vorhin $F_x + \varDelta F_x$ statt F_{x+1}, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$y_{x+2} = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_{x+2} + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_{x+2} + \ldots + \overset{n}{F}_x \overset{n}{z}_{x+2}$$
$$+ \overset{1}{z}_{x+2} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+2} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+2} \Delta \overset{n}{F}_x$$

wobei wir wieder die zweite Reihe = 0 setzen. Es ist dann

$$6) \quad \overset{1}{z}_{x+2} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+2} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+2} \Delta \overset{n}{F}_x = 0$$

und die vorige Gleichung wird einfacher

$$6^* \quad y_{x+2} = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_{x+2} + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_{x+2} + \ldots + \overset{n}{F}_x \overset{n}{z}_{x+2}.$$

Wendet man wieder ganz dasselbe Verfahren an, so findet sich, dass unter der weiteren Bedingung

$$7) \quad \overset{1}{z}_{x+3} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+3} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+3} \Delta \overset{3}{F}_x = 0$$

die Gleichung gilt

$$7^* \quad y_{x+3} = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_{x+3} + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_{x+3} + \ldots + \overset{n}{F}_x \overset{n}{z}_{x+3}.$$

Wie man auf diese Weise fortgehen kann, ist unmittelbar einleuchtend. und man gelangt so bis zu den Gleichungen

$$8) \quad \overset{1}{z}_{x+n-1} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n-1} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n-1} \Delta \overset{n}{F}_x = 0$$
$$8^* \quad y_{x+n-1} = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_{x+n-1} + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_{x+n-1} + \ldots + \overset{n}{F}_x \overset{n}{z}_{x+n-1}$$

aus deren letzter sich noch ergiebt

$$y_{x+n} = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_{x+n} + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_{x+n} + \ldots + \overset{n}{F}_x \overset{n}{z}_{x+n}$$
$$+ \overset{1}{z}_{x+n} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n} \Delta \overset{n}{F}_x$$

wenn man wieder $x + 1$ für x und $F_x + \Delta F_x$ für F_{x+1} setzt. Substituiren wir nun die für y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ... y_{x+n} gefundenen Ausdrücke in die Gleichung 1), so findet man bei gehöriger Anordnung

$$\overset{1}{F}_x \left(\overset{1}{z}_{x+n} + P_x \overset{1}{z}_{x+n-1} + Q_x \overset{1}{z}_{x+n-2} + \ldots + U_x \overset{1}{z}_x \right)$$
$$+ \overset{2}{F}_x \left(\overset{2}{z}_{x+n} + P_x \overset{2}{z}_{x+n-1} + Q_x \overset{2}{z}_{x+n-2} + \ldots + U_x \overset{2}{z}_x \right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \overset{n}{F}_x \left(\overset{n}{z}_{x+n} + P_x \overset{n}{z}_{x+n-1} + Q_x \overset{n}{z}_{x+n-2} + \ldots + U_x \overset{n}{z}_x \right)$$
$$+ \overset{1}{z}_{x+n} \Delta \overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n} \Delta \overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n} \Delta \overset{n}{F}_x = V_x.$$

Digitized by Google

Da aber $\overset{1}{z}_x$, $\overset{2}{z}_x$, ... $\overset{n}{z}_x$ die partikulären Integrale der Gleichung 2) sind, so befriedigt jede dieser Funktionen die genannte Gleichung; hierdurch annullirt sich Alles, was in den Parenthesen steht und es bleibt:

$$9)\quad \overset{1}{z}_{x+n}\Delta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n}\Delta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n}\Delta\overset{n}{F}_x = V_x.$$

Fassen wir das Bisherige zusammen, so lautet das Ergebniss folgendermassen: die Annahme 4) würde richtig sein, wenn man die n unbekannten Funktionen F_x so bestimmen könnte, dass sie den Gleichungen 5), 6), 7), 8) uud 9) gleichzeitig genügen. Dies ist aber immer möglich; denn sehen wir in den genannten Gleichungen nämlich

$$10)\quad \begin{cases} \overset{1}{z}_{x+1}\Delta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+1}\Delta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+1}\Delta\overset{n}{F}_x = 0 \\ \overset{1}{z}_{x+2}\Delta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+2}\Delta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+2}\Delta\overset{n}{F}_x = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \overset{1}{z}_{x+n-1}\Delta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n-1}\Delta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n-1}\Delta\overset{n}{F}_x = 0 \\ \overset{1}{z}_{x+n}\Delta\overset{1}{F}_x + \overset{2}{z}_{x+n}\Delta\overset{2}{F}_x + \ldots + \overset{n}{z}_{x+n}\Delta\overset{n}{F}_x = V_x \end{cases}$$

die n Differenzen

$$\Delta\overset{1}{F}_x,\ \Delta\overset{2}{F}_x,\ \ldots.\ \Delta\overset{n}{F}_x$$

als Unbekannte an, so sind jene Gleichungen sämmtlich vom ersten Grade und man kann daher jederzeit diese unbekannten Differenzen bestimmen. Aus ΔF_x erhält man nachher F_x selbst durch endliche Integration. Dass nun der so gewonnene Ausdruck 4) wirklich das allgemeine Integral der Gleichung 1) ist, ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Funktionen $\overset{1}{F}_x$, $\overset{2}{F}_x$, ... $\overset{n}{F}_x$ durch Integrationen gewonnen werden, mithin jede eine willkührliche Constante bei sich führt und folglich der Ausdruck 4) in der That n willkührliche Constanten enthält. Das Gesammtresultat unserer Untersuchung besteht also in dem Satze, dass man das allgemeine Integral der Gleichung 1) finden kann, sobald sich die partikulären Integrale der einfacheren Gleichung 2) angeben lassen. Da Letzteres immer möglich ist, wenn, wie in §. 3., P, Q, ... T, U constante Coeffizienten sind, so folgt hieraus als Corrollar, dass sich die Differenzengleichung

Digitized by Google

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + \ldots + Ty_{x+1} + Uy_x = V_x$$
jederzeit integriren lässt.

Nehmen wir beispielsweis $P = a$, $Q = b$, $n = 2$, so geht die Gleichung 1) oder die vorstehende in

$$11)\quad y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = V_x$$

über. Die einfachere Gleichung 2) wäre

$$z_{x+2} + az_{x+1} + bz_x = 0$$

und ihre partikulären Integrale sind

$$12)\quad \overset{1}{z}_x = \lambda_1{}^x \,,\ \overset{2}{z}_x = \lambda_2{}^x$$

wobei λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$13)\quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

bezeichnen. Nach No. 4 ist nun

$$14)\quad y_x = \overset{1}{F}_x\overset{1}{z}_x + \overset{2}{F}_x\overset{2}{z}_x = \overset{1}{F}_x\lambda_1{}^x + \overset{2}{F}_x\lambda_2{}^x$$

zu setzen und hier müssen $\overset{1}{F}_x$ und $\overset{2}{F}_x$ den Gleichungen 10) d. h.

$$\lambda_1{}^{x+1}\Delta\overset{1}{F}_x + \lambda_2{}^{x+1}\Delta\overset{2}{F}_x = 0$$

$$\lambda_1{}^{x+2}\Delta\overset{1}{F}_x + \lambda_2{}^{x+2}\Delta\overset{2}{F}_x = V_x$$

genügen; man findet daraus

$$\Delta\overset{1}{F}_x = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\,\frac{V_x}{\lambda_1{}^x}\,,\quad \Delta\overset{2}{F}_x = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\,\frac{V_x}{\lambda_2{}^x}$$

und mithin durch Integration

$$\overset{1}{F}_x = C_1 + \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\,\Sigma\,\frac{V_x}{\lambda_1{}^x}$$

$$\overset{2}{F}_x = C_2 - \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\,\Sigma\,\frac{V_x}{\lambda_2{}^x}$$

wo C_1 und C_2 die willkührlichen Constanten der Integration sind. Substituirt man dies in 14), so ergiebt sich

$$15)\quad y_x = C_1\lambda_1{}^x + C_2\lambda_2$$
$$+ \frac{\lambda_1{}^{x-1}}{\lambda_1-\lambda_2}\,\Sigma\,\frac{V_x}{\lambda_1{}^x} - \frac{\lambda_2{}^{x-1}}{\lambda_1-\lambda_2}\,\Sigma\,\frac{V_x}{\lambda_2{}^x}$$

als vollständiges Integral der Differenzengleichung 11). Für $V_x = x$ z. B., also

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = x$$

Digitized by Google

braucht man sich nur zu erinnern, dass

$$\Sigma \frac{x}{\lambda^x} = \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left\{ \frac{x-1}{\lambda^{x-1}} - \frac{x}{\lambda^{x-2}} \right\}$$

ist und man erhält dann durch eine leichte Reduktion

$$y_x = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x$$
$$+ \frac{x}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{[(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)]^2}$$

oder wenn man die Werthe von λ_1 und λ_2 selbst hinsetzt

$$y_x = C_1 \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \right)^x + C_2 \left(\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \right)^x$$
$$+ \frac{x}{1+a+b} - \frac{a+2}{(1+a+b)^2}.$$

Diese Formeln passen übrigens nicht auf den Fall gleicher Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$; man hat dann statt 14)

$$y_x = \overset{1}{F}_x \overset{1}{z}_x + \overset{2}{F}_x \overset{2}{z}_x = \overset{1}{F}_x \lambda_1^x + \overset{2}{F}_x x \lambda_1^{x-1}$$

zu setzen, wodurch die Gleichungen 10) in die folgenden übergehen

$$\lambda_1^{x+1} \Delta \overset{1}{F}_x + (x+1) \lambda_1^x \Delta \overset{2}{F}_x = 0$$
$$\lambda_1^{x+2} \Delta \overset{1}{F}_x + (x+2) \lambda_1^{x+1} \Delta \overset{2}{F}_x = V_x$$

hieraus findet sich

$$\overset{1}{F}_x = -\frac{1}{\lambda_1^2} \frac{(x+1)V_x}{\lambda_1^x}, \quad \overset{2}{F}_x = \frac{1}{\lambda_1} \frac{V_x}{\lambda_1^x}$$

mithin

$$\overset{1}{F}_x = C_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \Sigma \frac{(x+1)V_x}{\lambda_1^x}$$
$$\overset{2}{F}_x = C_2 + \frac{1}{\lambda_1} \Sigma \frac{V_x}{\lambda_1^x}$$

und als vollständiges Integral

$$16) \quad y_x = C_1 \lambda_1^x + C_2 x \lambda_1^{x-1}$$
$$- \lambda_1^{x-2} \Sigma \frac{(x+1)V_x}{\lambda_1^x} + x \lambda_1^{x-2} \Sigma \frac{V_x}{\lambda_1^x}.$$

Für $a = -2k$, $b = k^2$ hat man einfach $\lambda_1 = k$ zu setzen und damit das Integral von

$$y_{x+2} - 2k y_{x+1} + k^2 y_x = V_x.$$

Digitized by Google

§. 5.

Fortsetzung.

Nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Erörterungen kommt es nur noch darauf an, Gleichungen von der Form

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} + \dots + T_x z_{x+1} \quad U_x z_x = 0$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$1) \quad y_{x+n} = P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} + \dots + T_x y_{x+1} + U_x y_x$$

zu integriren, da man aus ihren Integralen leicht das Integral der allgemeinsten Differenzengleichung ersten Grades und n^{ter} Ordnung ableiten kann. In vielen Fällen nun ist hier die Substitution

$$2) \quad y_{x+1} = p_x y_x$$

sehr förderud, wobei p_x eine noch unbekannte Funktion von x bezeichnet. Man erhält nämlich aus ihr der Reihe nach

$$y_{x+2} = p_{x+1} y_{x+1} = p_x p_{x+1} y_x$$
$$y_{x+3} = p_{x+1} p_{x+2} y_{x+1} = p_x p_{x+1} p_{x+2} y_x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

überhaupt für ein ganzes positives m

$$y_{x+m} = p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+m-1} y_x$$

oder nach der in §. 2. eingeführten Bezeichnungsweise

$$y_{x+m} = \overset{m}{[p_{x+m-1}]} y_x.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes für $m = n, n-1, \dots 1$ geht nun die Gleichung 1) in eine andere über, welche eine durchgängige Hebung mit y_x gestattet, so dass noch übrig bleibt:

$$3) \quad \overset{n}{[p_{x+n-1}]} = P_x \overset{n-1}{[p_{x+n-2}]} + Q_x \overset{n-2}{[p_{x+n-3}]} + \dots + T_x \overset{1}{[p_x]} + U_x.$$

Diese Gleichung enthält nun die eine Unbekannte p_x; kann man letztere daraus bestimmen, so führt die Integration der Differenzengleichung 2) sofort zur Kenntniss von y_x, nämlich es ist

$$4) \quad y_x = C\overset{x}{[p_{x-1}]}.$$

Diese Reduktionsmethode lässt sich z. B. auf die sehr allgemeine Gleichung

$$5) \quad y_{x+n} = A\overset{1}{[X_{x+m}]} y_{x+n-1} + B\overset{2}{[X_{x+m}]} y_{x+n-2} + \dots$$
$$\dots + H\overset{n-1}{[X_{x+m}]} y_{x+1} + K\overset{n}{[X_{x+m}]} y_x$$

Digitized by Google

anwenden, worin $A, B, C, \dots H, K$ constante Grössen sind und X eine beliebige Funktion von x bezeichnet. Die Gleichung 3) verwandelt sich nämlich hier in die folgende

$$6)\quad [p_{x+n-1}]^{n} = A[X_{x+m}]^{1}[p_{x+n-2}]^{n-2} + B[X_{x+m}]^{2}[p_{x+n-3}]^{n-2} + \dots$$
$$\dots + H[X_{x+m}]^{n-2}[p_x]^{1} + K[X_{x+m}]^{n}$$

und dieser genügt man durch die Substitution

$$7)\quad p_x = \lambda X_{x+m-n+1}$$

worin λ einen noch unbestimmten constanten Factor bezeichnet. Die vorstehende Substitution giebt nämlich zunächst

$$[p_x]^{1} = \lambda X_{x+m-n+1} = \lambda[X_{x+m-n+1}]^{1}$$
$$[p_{x+1}]^{2} = p_{x+1}p_x = \lambda^2 X_{x+m-n+2}X_{x+m-n+1}$$
$$\text{d. i. } [p_{x+1}]^{2} = \lambda^2[X_{x+m-n+2}]^{2}.$$

Ebenso findet man weiter

$$[p_{x+2}]^{3} = \lambda^3[X_{x+m-n+3}]^{3}$$
$$[p_{x+1}]^{4} = \lambda^4[X_{x+m-n+4}]^{4}$$
$$\dots\dots\dots$$

und überhaupt für eine ganze positive Zahl r

$$[p_{x+r-1}]^{r} = \lambda^r[X_{x+m-n+r}]^{r}.$$

Substituiren wir dies für $r = n, n-1, \dots 2, 1$ in die Gleichung 6) so geht dieselbe in folgende über

$$8)\quad \lambda^n[X_{x+m}]^{n} = A\lambda^{n-1}[X_{x+m}]^{1}[X_{x+m-1}]^{n-1} + B\lambda^{n-2}[X_{x+m}]^{2}[X_{x+m-2}]^{n-2} + \dots$$
$$\dots + H\lambda[X_{x+m}]^{n-1}[X_{x+m-n+1}]^{1} + K[X_{x+m}]^{n}.$$

Die Faktoriellenprodukte, welche hier auf der rechten Seite vorkommen, stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$[X_{x+m}]^{r}[X_{x+m-r}]^{n-r} = X_{x+m}X_{x+m-1}X_{x+m-2}\dots X_{x+m-r+1}$$
$$\times\, X_{x+m-r}X_{x+m-r+1}X_{x+m-r+2}\dots X_{x+m-n+2}$$
$$= X_{x+m}X_{x+m-1}\dots X_{x+m-n+1} = [X_{x+m}]^{n}.$$

Man kann daher die Gleichung 8) mit $[X_{x+m}]^{n}$ heben und es bleibt dann die Gleichung

Digitized by Google

$$\lambda^n = A\lambda^{n-1} + B\lambda^{n-2} + \ldots\ldots + H\lambda + K$$

oder

$$9) \quad \lambda^n - A\lambda^{n-1} - B\lambda^{n-2} - \ldots - H\lambda - K = 0$$

übrig, welche zur Bestimmung von λ dient. Nennen wir

$$\lambda_1 \; , \; \lambda_2 \; , \; \lambda_3 \; \ldots\ldots \; \lambda_n$$

die n Wurzeln der Gleichung 9), so sind nach No. 7. die Ausdrücke

$$p_x = \lambda_1 X_{x+m-n+1} \; , \; \lambda_2 X_{x+m-n+1} \; , \; \ldots \; \lambda_n X_{x+m-n+1}$$

ebensoviele verschiedene Auflösungen der Gleichung 6). Jede von ihnen führt nach Formel 4) zu einem Integrale der gegebenen Differenzengleichung und mithin sind

$$y_x = C_1[\lambda_1 X_{x+m-n}]^{x} \; , \; C_2[\lambda_2 X_{x+m-n}]^{x} \; , \; \ldots . \; C_n[\lambda_n X_{x+m-n}]^{x}$$

d. i.

$$y_x = C_1\lambda_1^x[X_{x+m-n}]^{x} \; , \; C_2\lambda_2^x[X_{x+m-n}]^{x} \; , \; \ldots \; C_n\lambda_n^x[X_{x+m-n}]^{x}$$

die partikulären Integrale unserer Differenzengleichung, wobei C_1, C_2 C_3, C_4, ... C_n willkührliche Constanten sind. Nach der im Anfange von §. 4. gemachten Bemerkung giebt nun die Summe dieser partikulären Integrale das allgemeine Integral nämlich

$$10) \quad y_x = \left\{C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + \ldots + C_n\lambda_n^x\right\}[X_{x+m-n}]^{x}$$

Kommen unter den Wurzeln λ_1, λ_2, ... λ_n imaginäre oder gleiche Wurzeln vor, so verfährt man ganz wie in §. 4.

Nimmt man beispielsweis $X = x$ und $m = n$, so geht die Differenzengleichung 5) in

$$y_{x+n} = A[x_{x+n}]^{1} y_{x+n-1} + B[x_{x+n}]^{2} y_{x+n-2} + \ldots .$$

$$\ldots + H[x_{x+n}]^{n-1} y_{x+1} + K[x_{x+n}]^{n} y_x$$

über, wofür man auch schreiben kann

$$11) \quad y_x = A[x]^{1} y_{x-1} + B[x]^{2} y_{x-2} + \ldots + K[x]^{n} y_{x-n}$$

und ihr Integral ist nach No. 10)

$$12) \quad y_x = \left\{C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + \ldots + C_n\lambda_n^x\right\}[x]^{x}$$

wobei λ_1, λ_2, ... λ_n dieselbe Bedeutung haben wie dort. Um dies auf einen numerischen Fall anzuwenden sei $A = 2$, $B = 3$, $n = 2$, so haben wir nach 11)

Digitized by Google

$$13) \quad y_x = 2xy_{x-1} + 3x(x-1)y_{x-2}$$

die zur Bestimmung von λ_1 und λ_2 dienende Gleichung ist

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

also $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ und folglich nach 12)

$$14) \quad y_x = \left\{C_1 3^x + C_2(-1)^x\right\}[x]^x.$$

Nimmt man z. E. $y_0 = 1$, $y_1 = 4$, so findet man der Reihe nach aus 13)

$y_0 = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 22$, $y_3 = 204$, $y_4 = 2424$, ...
und in 14) sind jetzt C_1 und C_2 so zu bestimmen, dass für $x = 0$, $y_0 = 1$ und für $x = 1$, $y_1 = 4$ wird; dies giebt die Gleichungen

$$1 = C_1 + C_2 \ , \ 4 = C_1 . 3 - C_2$$

mithin $C_1 = \frac{5}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{4}$ und nun giebt der Ausdruck

$$y_x = 1.2..x\left\{\tfrac{5}{4} . 3^x - \tfrac{1}{4}(-1)^x\right\}$$

in der That das allgemeine Glied der vorhin aus der Differenzengleichung abgeleiteten Reihe.

§. 6.

Integration durch bestimmte Integrale.

Sehr vortheilhaft ist es in vielen Fällen, die Integration einer Differenzengleichung auf die einer Differenzialgleichung zurückzuführen und so das Integral der ersteren in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Man kann dies mittelst folgenden von *Laplace* angegebenen Kunstgriffs. Die gegebene Differenzengleichung sei

$$1) \quad A_x y_x + B_x \Delta y_x + C_x \Delta^2 y_x + \ldots + K_x \Delta^n y_x = 0$$

worin A_x , B_x , C_x etc. Funktionen von x bezeichnen mögen, welche unter der einen oder anderen von nachfolgenden Formen enthalten sind

$$2) \quad \begin{cases} A_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ B_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \end{cases}$$

etc.

oder

$$3)\quad \begin{cases} A_x = a_0 + a_1[x]^1 + a_2[x]^2 + a_3[x]^3 + \dots \\ B_x = b_0 + b_1[x]^1 + b_2[x]^2 + b_3[x]^3 + \dots \end{cases}$$

etc.

Findet nun das erste statt, so setze man

$$4)\qquad y_x = \int e^{-xu} v\,du$$

wobei x als Constante in Beziehung auf die nach u zu verrichtende Integration dient, v eine noch unbekannte Funktion von u allein bezeichnet und die vor der Hand noch unbestimmten Integrationsgränzen für u von x unabhängig sein mögen. Man hat nun zunächst

$$\Delta y_x = \int e^{-(x+1)u} v\,du - \int e^{-xu} v\,du = \int e^{-xu}(e^{-u}-1)v\,du$$

$$\Delta^2 y_x = \int e^{-(x+1)u}(e^{-u}-1)v\,du - \int e^{-xu}(e^{-u}-1)v\,du$$

$$= \int e^{-xu}(e^{-u}-1)^2 v\,du$$

ebenso

$$\Delta^3 y_x = \int e^{-xu}(e^{-u}-1)^3 v\,du\;,\quad \Delta^4 y_x = \int e^{-xu}(e^{-u}-1)^4 v\,du \text{ etc.}$$

Substituiren wir dies in die Gleichung 1), welcher wir nach No. 2) vorerst die Form

$$\begin{aligned} 0 = &(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots) y_x \\ &+ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots) \Delta y_x \\ &+ (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots) \Delta^2 y_x \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

geben, so haben wir zunächst

$$0 = \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) e^{-xu} v\,du$$

$$+ \int (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) e^{-xu}(e^{-u}-1) v\,du$$

Digitized by Google

$$+\int (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)\, e^{-xu}(e^{-u}-1)^2 v\, du$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei die Faktoren $a_0 + a_1 x$ etc., $b_0 + b_1 x$ etc., .. unter die Integralzeichen gestellt worden sind, weil sie nicht von u abhängen und folglich in Bezug auf die angedeuteten Integrationen als Constanten dienen. Vereinigen wir alle Integrale und ordnen nach Potenzen von x, so wird

$$0 = \int v\, du \left\{ \begin{array}{l} [a_0 + b_0(e^{-u}-1) + c_0(e^{-u}-1)^2 + \ldots]e^{-xu} \\ + [a_1 + b_1(e^{-u}-1) + c_1(e^{-u}-1)^2 + \ldots]xe^{-xu} \\ + [a_2 + b_2(e^{-u}-1) + c_2(e^{-u}-1)^2 + \ldots]x^2 e^{-xu} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir ferner e^{-xu} mit ω, so ist

$$xe^{-xu} = -\frac{d\omega}{du},\quad x^2 e^{-xu} = +\frac{d^2\omega}{du^2},\ \text{u. s. f.}$$

Substituiren wir dies in die vorhergehende Gleichung und setzen zur Abkürzung

$$5)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 + b_0(e^{-u}-1) + c_0(e^{-u}-1)^2 + \ldots = M \\ a_1 + b_1(e^{-u}-1) + c_1(e^{-u}-1)^2 + \ldots = N \\ a_2 + b_2(e^{-u}-1) + c_2(e^{-u}-1)^2 + \ldots = P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

so wird

$$6)\quad 0 = \int v\, du \left\{ M\omega - N\frac{d\omega}{du} + P\frac{d^2\omega}{du^2} - \ldots\ldots \right\}$$

wobei der höchste Index der successiven Differenziationen mit dem Exponenten der höchsten in den Gleichungen 2) vorkommenden Potenz von x zusammenfällt.

Stehen dagegen A_x, B_x, C_x ... unter der in No. 3) verzeichneten Form, so setze man

$$7)\quad y_x = \int u^x v\, du$$

es wird dann zunächst:

$$\Delta y_x = \int u^x(u-1)v\,du\,,\ \Delta^2 y_x = \int u^x(u-1)^2 v\,du \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man dies und die Gleichungen 3) in No. 1), so wird nach gehöriger Ordnung

$$0 = \int v\,du \left\{\begin{array}{l} \quad [a_0 + b_0(u-1) + c_0(u-1)^2 + \ldots]u^x \\ + [a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2 + \ldots][x]^1 u^x \\ + [a_2 + b_2(u-1) + c_2(u-1)^2 + \ldots][x]^2 u^x \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Andererseits ist für $u^x = \omega$,

$$[x]^1 u^x = u\,\frac{d\omega}{du}\,,\ [x]^2 u^x = u^2\,\frac{d^2\omega}{du^2}\,,\ \ldots\ldots$$

Substituirt man dies und setzt gleichzeitig

$$8)\ \left\{\begin{array}{l} \quad a_0 + b_0(u-1) + c_0(u-1)^2 + \ldots. = M \\ u[a_1 + b_1(u-1) + e_1(u-1)^2 + \ldots.] = N \\ u^2[a_2 + b_2(u-1) + c_2(u-1)^2 + \ldots.] = P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

so erhält man ganz wie vorhin

$$9)\quad 0 = \int v\,du \left\{M\omega - N\,\frac{d\omega}{du} + P\,\frac{d^2\omega}{du^2} - \ldots\right\}$$

nur dass hier v, ω, M, N, P, ... eine andere Bedeutung wie in 6) haben.

Um nun aus der vorstehenden Gleichung die unbekannte Funktion v und die Gränzen der Integrale 4) und 7) zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen. Durch partielle Integration ist

$$10)\ \int v\,du\,.\,N\,\frac{d\omega}{du} = Nv\int\frac{d\omega}{du}\,du - \int\frac{d(Nv)}{du}\,du\int\frac{d\omega}{du}\,du$$

$$= Nv\omega - \int\frac{d(Nv)}{du}\,\omega\,du,$$

ferner

$$\int v\,du\,P\,\frac{d^2\omega}{du^2} = Pv\int\frac{d^2\omega}{du^2}\,du - \int\frac{d(Pv)}{du}\,du\int\frac{d^2\omega}{du^2}\,du$$

Digitized by Google

$$= Pv\,\frac{d\omega}{du} - \int \frac{d(Pv)}{du}\,\frac{d\omega}{du}\,du$$

für das Integral rechts kann man aber setzen

$$\frac{d(Pv)}{du}\int \frac{d\omega}{du}\,du - \int \frac{d^2(Pv)}{du^2}\,du \int \frac{d\omega}{du}\,du$$

$$= \frac{d(Pv)}{du}\,\omega - \int \frac{d^2(Pv)}{du^2}\,\omega\,du$$

also wenn man dies substituirt

$$11)\quad \int v\,du\,P\,\frac{d^2\omega}{du^2}$$

$$= (Pv)\,\frac{d\omega}{du} - \frac{d(Pv)}{du}\,\omega + \int \frac{d^2(Pv)}{du^2}\,\omega\,du.$$

Eben so leicht findet man weiter

$$12)\quad \int v\,du\,Q\,\frac{d^3\omega}{du^3}$$

$$= (Qv)\,\frac{d^2\omega}{du^2} - \frac{d(Qv)}{du}\,\frac{d\omega}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2}\,\omega - \int \frac{d^3(Qv)}{du^3}\,\omega\,du$$

u. s. f.

und wenn man dies Alles in die Gleichung 9) oder

$$0 = \int v\,du\,M\omega + \int v\,du\,N\,\frac{d\omega}{du} + \int v\,du\,P\,\frac{d^2\omega}{du^2} + \ldots.$$

substituirt, so nimmt dieselbe folgende Form an

$$0 = \int (Mv)\,\omega\,du$$

$$+ (Nv)\,\omega - \int \frac{d(Nv)}{du}\,\omega\,du$$

$$+ (Pv)\,\frac{d\omega}{du} - \frac{d(Pv)}{du}\,\omega + \int \frac{d^2(Pv)}{du}\,\omega\,du$$

$$+ (Qv)\,\frac{d^2\omega}{du^2} - \frac{d(Qv)}{du}\,\frac{d\omega}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2}\,\omega - \int \frac{d^3(Qv)}{du^3}\,\omega\,du$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wofür man bei besserer Anordnung schreiben kann:

Digitized by Google

$$13)\quad 0 = \int \Big\{(Mv) - \frac{d(Nv)}{du} + \frac{d^2(Pv)}{du^2} - \ldots\Big\}\,\omega\,du$$
$$+ \Big\{(Nv) - \frac{d(Pv)}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2} - \ldots\Big\}\,\omega$$
$$+ \Big\{(Pv) - \frac{d(Qv)}{du} + \ldots\ldots\Big\}\frac{d\omega}{du}$$
$$+ \Big\{(Qv) - \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}\frac{d^2\omega}{du^2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieser Gleichung genügt man offenbar, wenn man setzt

$$14)\quad (Mv) - \frac{d(Nv)}{du} + \frac{d^2(Pv)}{du^2} - \ldots = 0$$

$$15)\quad \begin{cases} \Big\{(Nv) - \frac{d(Pv)}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2} - \ldots\Big\}\,\omega = 0 \\ \Big\{(Pv) - \frac{d(Pv)}{du} + \ldots\ldots\Big\}\frac{d\omega}{du} = 0 \\ \Big\{(Qv) - \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}\frac{d^2\omega}{du^2} = 0 \end{cases}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier dient nun die Differenzialgleichung 14) zur Bestimmung der Funktion v; denn entwickelt man die Differenzialquotienten $\frac{d(Nv)}{du}$, $\frac{d^2(Pv)}{du}$ etc. nach der bekannten Regel für die Differenziation der Produkte, so geht die Gleichung 14) in die folgende über

$$Mv - \Big\{\frac{dN}{du}\,v + N\,\frac{dv}{du}\Big\}$$
$$+ \Big\{\frac{d^2P}{du^2}\,v + 2\,\frac{dP}{du}\,\frac{dv}{du} + P\,\frac{d^2v}{du^2}\Big\}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \Big\{M - \frac{dN}{du} + \frac{d^2P}{du^2} - \frac{d^3Q}{du^3} + \ldots\Big\}\,v$$
$$- \Big\{N - \frac{dP}{du} + \frac{d^2Q}{du^2} - \ldots\ldots\Big\}\frac{dv}{du}$$
$$+ \Big\{P - \frac{dQ}{du} + \ldots\ldots\ldots\Big\}\frac{d^2v}{du^2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

und hier ist alles in den Parenthesen Stehende bekannt und folglich kann man die Gleichung kurz in der Form

$$M'v - N' \frac{dv}{du} + P' \frac{d^2v}{du^2} - \ldots . = 0$$

darstellen, woraus man sogleich ersieht, dass es sich hier um eine gewöhnliche Differenzialgleichung handelt, deren Integration zur Kenntniss von v führt.

Es ist nun auch nicht schwer die Bedeutung des Gleichungensystemes 15) einzusehen. Hätte man nämlich statt

$$y_x = \int e^{-xu} v\, du \text{ und } y_x = \int u^x v\, du$$

gesetzt

$$y_x = \int_\alpha^\beta e^{-xu} v\, du \text{ und } y_x = \int_\alpha^\beta u^x v\, du$$

wo α und β die noch unbekannten Integrationsgränzen sind, so würde man bei den partiellen Integrationen in 10), 11) und 12) ebenfalls diese Gränzen einführen und also in denjenigen Bestandtheilen der Gleichungen 10), 11), 12), welche kein Integralzeichen besitzen, statt u die Werthe $u = \beta$, $u = \alpha$ substituiren und von den Resultaten dieser Substitution die Differenz nehmen müssen. Aus jenen vom Integralzeichen befreiten Partieen der Gleichungen 10) 11) 12) besteht aber das Gleichungensystem 15) und mithin bezieht es sich nicht auf unbestimmt veränderliche u, sondern auf ganz bestimmte u, nämlich die Integrationsgränzen in den Werthen von y_x. Führen wir daher in die Gleichungen 15) den aus 14) bestimmten Werth von v ein, so verwandeln sich dieselben in Bedingungsgleichungen für u und indem man sie nach u auflöst, erhält man die Integrationsgränzen für u. Heissen dieselben etwa

$$u = \alpha \text{ , } \beta \text{ , } \gamma \text{ , } \ldots . . \lambda \text{ , } \varkappa$$

und sind deren n, so bilden die Ausdrücke

$$y_x = \int_\alpha^\beta v\varphi(x , u) du \text{ , } \int_\beta^\gamma v\varphi(x , u) du \text{ , } \ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$\ldots\ldots \int_{\lambda}^{x} v\varphi(x\,,u)du\;,\;\int_{x}^{\alpha} v\varphi(x\,,u)\,dv$$

worin $\varphi(x\,,u)$ entweder e^{-xu} oder u^x bedeutet, eine Reihe von partikulären Integralen der Differenzengleichung 1), und man erhält jetzt als allgemeines Integral derselben

$$y_x = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} v\varphi(x\,,u)du + C_2 \int_{\beta}^{\alpha} v\varphi(x\,,u)du + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + C_{n-1} \int_{\lambda}^{x} v\varphi(x\,,u)du + C_2 \int_{x}^{\alpha} v\varphi(x\,,u)dv.$$

Um das Detail dieser ausgezeichneten Integrationsmethode zeigen zu können, wollen wir dieselbe auf eine Partie wichtiger Beispiele anwenden.

§. 7.

Beispiele zur vorigen Methode.

I. Die gegebene Differenzengleichung sei

$$1)\quad -xy_x + \Delta y_x = 9$$

oder wenn man $y_{x+1} - y_x$ für Δy_x substituirt

$$2)\quad y_{x+1} = (x+1)y_x$$

so hat man durch Vergleichung von 1) mit 1) und 3) des vorigen Paragraphen

$$a_0 = 0\,,\ a_1 = -1\,,\ a_2 = a_3 \ldots\ldots = 0$$
$$b_0 = 1\,,\ b_1 = 0\,,\ b_2 = h_3 \ldots = 0.$$

Setzen wir nun nach No. 7)

$$y_x = \int u^x v\,du$$

so ist nach No. 8)

$$M = u - 1\,,\ N = -u\,,\ P = Q \ldots\ldots = 0.$$

Die Gleichung 14) reduzirt sich jetzt auf die sehr einfache

$$Mv = \frac{d(Nv)}{du} = \frac{dN}{du}v + N\frac{dv}{du}$$

Digitized by Google

d. i. vermöge der Werthe von M und N

$$v = -\frac{dv}{du} \text{ oder } \frac{dv}{v} = -du$$

hieraus ergiebt sich durch Integration, wenn man die Integrationskonstante mit lC bezeichnet

$$lv = -u + lC \text{ und } v = Ce^{-u}$$

und mithin

$$y_x = C\int u^x e^{-u}\, du.$$

Substituiren wir den Werth von v in das Gleichungensystem 15), so wird wegen $\omega = u^x$,

$$-uCe^{-u}u^x = 0 \text{ oder } u^{x+1}e^{-u} = 0$$

und diese Gleichung hat für $x + 1 > 0$ zwei Auflösungen, nämlich $u = 0$ und $u = \infty$, indem man sich leicht überzeugt, dass für unendlich wachsende u

$$Lim\left(\frac{u^{x+1}}{e^x}\right) = 0$$

wird. Wir haben daher für $x > -1$

$$3)\quad y_x = C\int_0^\infty u^x e^{-u}\, du$$

als Integral der Gleichung 1). Diese Darstellung von y_x bietet den erheblichen Vortheil, nicht auf positive ganze x beschränkt zu sein; erinnert man sich an die Definition der Gammafunktion

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-u}du$$

so erkennt man auf der Stelle die Beziehung

$$y_x = C\Gamma(x+1)$$

woraus für ganze positive x dasselbe Integral wie früher, nämlich

$$y_x = C.1.2.3\ldots x = C[\overset{x}{x}]$$

hervorgeht.

II. Um ein allgemeines Beispiel zu haben sei

$$4)\quad (a_0 + a_1x)y_x + (b_0 + b_1x)\Delta y_x + (c_0 + c_1x)\Delta^2 y_x = 0$$

die zu integrirende Differenzengleichung. Setzt man nach No. 7) in §. 6

$$y_x = \int u^x v \, du$$

so ist nach No. 8) ebendaselbst

$$5) \quad M = a_0 + b_0(u-1) + c_0(u-1)^2$$

$$6) \quad N = \{a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2\} u$$

$$P = Q \ldots . = 0.$$

Die zur Bestimmung von v dienende Gleichung 14) verwandelt sich jetzt in

$$Mv = \frac{d(Nv)}{du} = \frac{dN}{du} v + \frac{dv}{du} N$$

d. i.

$$(M du - dN)v = N dv$$

oder wenn man die Variabelen sondert

$$\frac{M}{N} du - \frac{dN}{N} = \frac{dv}{v}.$$

Das Integral hiervon ist, wenn die willkührliche Constante der Integration mit lC bezeichnet wird,

$$\int \frac{M}{N} du - lN = lv + lC,$$

woraus man als Werth von v erhält

$$v = \frac{C}{N} e^{\int M du : N}$$

Bezeichnen wir $\int \frac{M}{N} du$ zur Abkürzung mit U, also

$$7) \quad U = \int \frac{a_0 + b_0(u-1) + c_0(u-1)^2}{a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2} \frac{du}{u},$$

so ist jetzt

$$v = \frac{C}{N} e^U \text{ und } y_x = \int \frac{C}{N} e^U u^x du$$

oder

$$8)\quad y_x = C\int \frac{u^{x-1}}{a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2}\, e^U du.$$

Zur Bestimmung der Integrationsgränzen dient das Gleichungensystem 15), welches sich auf $N v \omega = 0$ d h.

$$9)\quad \left\{a_1 + b_1(u-1) + c_1(u-1)^2\right\} u^{x+1} e^U = 0$$

reduzirt. Will man statt dieser Formeln lieber solche sehen, welche sich auf die bisherige Darstellungsweise der Differenzengleichungen beziehen, so setze man in No. 4)

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$
$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

es wird dann

$$\left\{a_0 - b_0 + c_0 + (a_1 - b_1 + c_1)x\right\} y_x$$
$$+ \left\{b_0 - 2c_0 + (b_1 - 2c)x\right\} y_{x+1} + \left\{c_0 + c_1 x\right\} y_{x+2} - 0.$$

Hier nehme man weiter zur Abkürzung

$$a_0 - b_0 + c_0 = \alpha_0 \;,\; a_1 - b_1 + c_1 = \beta_0$$
$$b_0 - 2c_0 = \alpha_1 \;,\; b_1 - 2c_1 = \beta_1$$
$$c_0 = \alpha_2 \;,\; c_1 = \beta_2$$

so wird unsere Differenzengleichung:

$$10)\quad (\alpha_0 + \beta_0 x) y_x + (\alpha_1 + \beta_1 x) y_{x+1} + (\alpha_2 + \beta_2 x) y_{x+2} = 0$$

und durch dieselben Substitutionen erhalten wir statt der Formeln 7), 8) und 9) die folgenden:

$$11)\quad U = \int \frac{\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2}{\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2} \frac{du}{u}$$

$$12)\quad y_x = C\int \frac{u^{x-1}}{\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2}\, e^U du$$

$$13)\quad \left\{\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2\right\} u^{x+1} e^U = 0.$$

1. Wendet man diese Formeln zunächst auf den sehr einfachen Fall

$$14)\quad x y_x - y_{x+1} = 0 \text{ oder } y_{x+1} = x y_x$$

an, so hat man

Digitized by Google

$$U = \int - du = - u$$

$$y_x = C \int u^{x-1} e^{-u} du$$

und da die Gleichung 13), nämlich $u^{x+1}e^{-u} = 0$ nur die beiden Auflösungen $u = 0$, $u = \infty$ hat,

$$15) \quad y_x = C \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du = C\Gamma(x).$$

2. Ein zweites Beispiel für die obigen Formeln liefert die Differenzengleichung

$$16) \quad xy_x - (m + x) y_{x+1} = 0 \text{ oder } y_{x+1} = \frac{x}{x+m} y_x$$

worin m eine beliebige positive Grösse bezeichnet. Es wird dann

$$U = \int \frac{-m}{1-u} du = l(1-u)^m$$

$$e^U = (1-u)^m, \quad y_x = C \int u^{x-1} (1-u)^{m-1} du.$$

Die Gleichung 13) nämlich

$$u^{x+1} (1-u)^{m+1} = 0$$

hat die zwei Wurzeln $u = 0$, $u = 1$ und mithin ist

$$17) \quad y_x = C \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{m-1} du$$

wofür man nach einer bekannten Formel der Gammafunktionentheorie auch

$$y_x = C \frac{\Gamma(x)\Gamma(m)}{\Gamma(x+m)} = C' \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+m)}$$

schreiben kann. Ist m eine ganze positive Zahl, so lässt sich die obige Integration leicht ausführen und giebt

$$y_x = \frac{C'}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)} = \frac{C'}{[x+m-1]^{m}}.$$

3. Wir betrachten noch die bemerkenswerthe Differenzengleichung

Digitized by Google

$$18)\quad xy_x - y_{x+1} + xy_{x+2} = 0$$
$$\text{oder } y_{x+1} = x(y_x + y_{x+2}).$$

Sie giebt nach den Formeln 11), 12 und 13) behandelt

$$U = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\,Arctan\, u$$

mithin ist

$$y_x = C \int \frac{u^{x-1}}{1+u^2}\, e^{-Arctan\, u}\, du$$

eine partikuläre Auflösung derselben, bei welcher die Integrationsgränzen durch die Gleichung

$$(1 + u^2)u^{x+1}e^{-Arctan\, u} = 0$$

bestimmt werden. Da $Arctan\, u$ niemals unendlich, folglich $e^{-Arctan\, u}$ nicht Null werden kann, so reduzirt sich diese Gleichung auf

$$(1 + u^2)u^{x+1} = 0$$

und ihre Wurzeln sind

$$u = 0\,,\; u = +\sqrt{-1}\,,\; u = -\sqrt{-1}$$

wobei wir $\sqrt{-1}$ zur Abkürzung mit i bezeichnen wollen. Die partikulären Integrale unserer Differenzengleichung sind demnach

$$C' \int_0^{+i} \frac{u^{x-1}}{1+u^2}\, e^{-Arctan\, u}\, du \text{ und } C'' \int_0^{-i} \frac{u^{x-1}}{1+u^2}\, e^{-Arctan\, u}\, du$$

woraus sich als allgemeines Integral ergiebt

$$y_x = C' \int_0^{+i} \frac{u^{x-1}}{1+u^2}\, e^{-Arctan\, u}\, du + C'' \int_0^{-i} \frac{u^{x-1}}{1+u^2}\, e^{-Arctan\, u}\, du.$$

Um hier die imaginären Integrationsgränzen los zu werden, setzen wir im ersten Integrale $u = (+i)s$ und im zweiten $u = (-i)s$, wobei s die neue Variable der Integration bezeichnet. Statt der Gränzen $u = 0$, $u = +i$ treten dann im ersten Integrale die folgenden

$$(+i)s = 0\,,\; (+i)s = +i \text{ d. h. } s = 0\,,\; s = 1$$

ein und ebenso werden die Integrationsgränzen des zweiten Integrales 0 und 1. Ferner ist im ersten Integrale

$$Arctan\, u = Arctan\,(si) = i\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

Digitized by Google

und im zweiten

$$Arctan\ u = Arctan\ (-si) = -i\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = t$$

setzen wollen. Nach diesen Bemerkungen erhält man leicht

$$y_x = C\int_0^1 \frac{(+i)^x s^{x-1}}{1-s^2}\, e^{-ti}ds + C''\int_0^1 \frac{(-i)^x s^{x-1}}{1-s^2}\, e^{+ti}ds.$$

Ferner ist aber

$$+i = e^{\frac{1}{2}\pi i},\ -i = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$

und wenn man beiderseits auf die x^{te} Potenz erhebt

$$(+i)^x = e^{\frac{1}{2}\pi x i},\ (-i)^x = e^{-\frac{1}{2}\pi x i}$$

und wenn dies in den Werth von y_x substituirt wird,

$$y_x = C'\int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1-s^2}\, e^{(\frac{1}{2}\pi x - t)i}ds + C''\int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1-s^2}\, e^{-(\frac{1}{2}\pi x - t)i}\,ds.$$

Zerlegt man die imaginären Exponenzialgrössen in Cosinus und Sinus, so wird hieraus

$$y_x = (C' + C'')\int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1-s^2}\cos(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\,ds$$

$$+ (C' - C'')i\int_0^1 \frac{s^{x-1}}{1-s^2}\sin(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\,ds$$

wobei wir $C' + C''$ mit C_1 und $(C' - C'')i$ mit C_2 bezeichnen wollen. Das so erhaltene vollständige Integral

$$y_x = C_1\int_0^1 s^{x-1}\cos(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\,\frac{ds}{1-s^2}$$

$$+ C_2\int_0^1 s^{x-1}\sin(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\,\frac{ds}{1-s^2}$$

ist übrigens noch einer bedeutenden Transformation fähig, welche darin besteht, dass man die zur Abkürzung eingeführte Grösse t als

Digitized by Google

neue Variable ansieht und demgemäss s durch t ausdrückt. Aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} l \left(\frac{1+s}{1-s} \right) = t$$

folgt nun zunächst durch Differenziation

$$\frac{ds}{1-s^2} = dt,$$

ferner, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$\frac{1+s}{1-s} = e^{2t}, \quad s = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.$$

Den Werthen $s = 0$ und $s = 1$ endlich entsprechen die Werthe $t = \frac{1}{2} l 1 = 0$ und $t = \frac{1}{2} l (\frac{1}{0}) = \infty$. Nach allen diesen Bemerkungen wird nun

$$19) \quad y_x = C_1 \int_0^\infty \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right)^{x-1} \cos(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\, dt$$
$$+ C_2 \int_0^\infty \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right)^{x-1} \sin(\tfrac{1}{2}\pi x - t)\, dt.$$

Es kann übrigens vorkommen, dass die Integrationsmethode, von welcher wir hier Beispiele gegeben haben, nicht zum allgemeinen Integrale der aufgestellten Differenzengleichung führt, und zwar tritt dieser Fall ein, wenn die zur Bestimmung der Integrationsgränzen dienenden Gleichungen nicht soviel Wurzeln besitzen, als zur Formirung aller partikulären Integrale nothwendig sind. Ist z. B. die Differenzengleichung von der n^{ten} Ordnung, so müssen jene Gleichungen $n+1$ Wurzeln haben und heissen dieselben $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, so kann man allerdings n partikuläre Integrale erhalten nämlich

$$C_1 \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} u^x v\, du, \quad C_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u^x v\, du, \quad \ldots \quad C_n \int_{\lambda_0}^{\lambda_n} u^x v\, du,$$

dies würde aber nicht mehr möglich sein, wenn die Anzahl jener Wurzeln weniger als $n+1$ betrüge, was dann immer ein Zeichen ist, dass es particuläre Integrale jener Differenzengleichung giebt, die sich

Digitized by Google

nicht unter der Form $\int u^x v \, du$ oder $\int e^{-xu} v \, du$ darstellen lassen und also auf anderem Wege gesucht werden müssen. Sei z. B. die gegebene Differenzengleichung

$$y_x + x y_{x+1} - y_{x+2} = 0$$

$$20) \quad \text{oder } y_{x+2} - y_x = x y_{x+1}$$

so findet man mittelst der Formeln 11), 12) und 13) sogleich

$$U = \int \frac{1 - u^2}{u^2} \, du = -\left(\frac{1}{u} + u\right)$$

$$y_x = C \int u^{x-2} e^{-\left(u + \frac{1}{u}\right)} du$$

und zur Bestimmung der Integrationsgänzen dient die Gleichung

$$u^{x+2} e^{-\left(u + \frac{1}{u}\right)} = 0.$$

Diese hat nur zwei Auflösungen, nämlich $u = 0$, $u = \infty$, so dass

$$21) \quad y_x = C \int^{\infty} u^{x-2} e^{-\left(u - \frac{1}{u}\right)} du$$

wird, was aber nur ein partikuläres Integral ist.

In solchen Fällen muss man sich einer anderen Integrationsmethode bedienen, wie z. B. der im folgenden Paragraphen auseinandergesetzten.

§. 8.

Integration mit Hülfe unendlicher Reihen.

Da es in vielen Fällen, wo nicht in den meisten, nur darauf ankommt, den Werth von y_x für ein ganzes positives x zu ermitteln, so liegt der Gedanke nahe, die unbekannten Grössen $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ als Coeffizienten irgend einer Reihe anzusehen. Setzen wir etwa

$$1) \quad u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots$$

so ist klar, dass u eine gewisse noch unbekannte Funktion von t sein wird; könnte man die Form derselben finden, so wäre auch y_n leicht zu bestimmen, denn es wäre dann in Folge des Theoremes von *Mac Laurin*

Digitized by Google

$$2) \quad y_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n u}{dt^n}$$

wobei nach geschehener Differenziation $t = 0$ zu setzen ist. Die gegegebene Differenzengleichung, aus welcher ursprünglich y_x oder y_n bestimmt werden sollte, bildet nun offenbar eine Rekursionsformel zwischen den Coeffizienten $y_0, y_1, y_2, \ldots$ und es wird häufig glücken, aus dieser Rekursionsformel eine Eigenschaft der Funktion u abzuleiten, welche zur Bestimmung dieser Funktion selbst hinreicht; spricht sich diese Eigenschaft der Funktion u in einer Differenzialgleichung aus, so erhält man durch Integration derselben zunächst u und darauf y_n mittelst der Formel 2). Das Technische dieses Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

I. Die gegebene Differenzengleichung sei ganz einfach

$$3) \quad y_x = (x+1)y_{x+1} \text{ oder } y_n = (n+1)y_{n+1}$$

so erhält man durch Multiplikation derselben mit t^n und durch nachherige Addition alles Dessen, was für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zum Vorschein kommt,

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots$$
$$= y_1 + 2y_2 t + 3y_3 t^2 + 4y_4 t^3 + \ldots.$$

Setzen wir nun wie in No. 1)

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots.$$

so folgt durch Differenziation

$$\frac{du}{dt} = y_1 + 2y_2 t + 3y_3 t^2 + 4y_4 t^3 + \ldots.$$

und wenn wir diese beiden Werthe in die vorige Gleichung substituiren, so geht letztere in die Differenzialgleichung

$$u = \frac{du}{dt}$$

über, aus welcher durch Integration

$$u = Ce^t$$

folgt, wenn wir mit C eine beliebige Constante bezeichnen. Die Formel 2) giebt nun für $t = 0$

$$4) \quad y_n = \frac{C}{1.2.3\ldots n}$$

was in der That das Integral der Differenzengleichung 3) ist.

Digitized by Google

II. Um die etwas allgemeinere Differenzengleichung

$$5) \quad 1 + y_n = (n+1)y_{n+1}$$

zu integriren, multipliziren wir wieder mit t^n, setzen $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und addiren Alles; es wird so

$$\begin{aligned} & 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \ldots \\ & + y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots . \\ & = y_1 + 2y_2 t + 3y_3 t^2 + 4y_4 t^3 + \ldots \end{aligned}$$

d. i. wenn man die erste Reihe links summirt, was für $t < 1$ leicht geschehen kann und darauf die Substitution 1) vornimmt,

$$\frac{1}{1-t} + u = \frac{du}{dt}.$$

Um diese Dieffrenzialgleichung zu integriren, setzt man $u = ve^t$, woraus man erhält

$$\frac{1}{1-t} = e^t \frac{dv}{dt}$$

$$v = \int \frac{dt}{1-t} e^{-t} + C$$

und mithin

$$6) \quad u = Ce^t + e^t \int \frac{dt}{1-t} e^{-t}.$$

Die Integration rechter Hand ist leicht auszuführen, wenn man die Reihen für $\frac{1}{1-t}$ und e^{-t} mit einander multiplizirt und Alles nach Potenzen von t ordnet; man findet so

$$\begin{aligned} u = Ce^t + e^t \Big[t & + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1'}\right) t^2 \\ & + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{1'} + \frac{1}{2'}\right) t^3 \\ & + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1'} + \frac{1}{2'} + \frac{1}{3'}\right) t^4 + \ldots \Big] \end{aligned}$$

wobei überhaupt m' zur Abkürzung für $1.2.3 \ldots m$ gebraucht worden ist. Es ist nun leicht y_n zu finden, wenn man sich erinnert, dass y_n den Coeffizient von t^n darstellt; setzt man daher für e^t die gleich-

Digitized by Google

geltende Reihe, multiplizirt und ordnet Alles nach Potenzen von t, so giebt der Coeffizient von t^n geradezu das gesuchte y_n.

III. Ein etwas complizirteres Beispiel ist das folgende. Es sei

$$7)\quad ny_n + (n+1)y_{n+1}$$
$$= y_0y_n + y_1y_{n-1} + y_2y_{n-2} + \dots + y_ny_0$$

so ist durch Multiplikation mit t^n und durch Addition alles Dessen, was für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ zum Vorschein kommt:

$$\begin{aligned} & y_1t + 2y_2t^2 + 3y_3t^3 + \dots\dots \\ + & y_1 + 2y_2t + 3y_3t^2 + 4y_4t^3 + \dots\dots \\ = & y_0y_0 \\ + & (y_0y_1 + y_1y_0)t \\ + & (y_0y_2 + y_1y_1 + y_2y_0)t^2 \\ + & (y_0y_3 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_3y_0)t^3 \\ + & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nimmt man wieder die in No. 1) bezeichnete Substitution vor, so ist die erste Reihe links $= t\dfrac{du}{dt}$, die zweite $= \dfrac{du}{dt}$ und die Reihe auf der rechten Seite $= u^2$, und es wird folglich

$$(t+1)\frac{du}{dt} = u^2$$

oder

$$-\frac{du}{u^2} = -\frac{dt}{1+t}$$

woraus man sogleich durch Integration

$$\frac{1}{u} = C - l(1+t)$$

und durch Umkehrung

$$8)\quad u = \frac{1}{C - l(1+t)}$$

erhält. Diese Reihe ist leicht nach Potenzen von t zu ordnen, indem man zunächst

$$u = \frac{1}{C}\,\frac{1}{1 - \dfrac{l(1+t)}{C}}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{C} + \frac{l(1+t)}{C^2} + \frac{[l(1+t)]^2}{C^3} + \frac{[l(1+t)]^3}{C^4} + \ldots.$$

setzt und darauf jedes einzelne Glied in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe umsetzt. Zu einem compendiöseren Ausdrucke gelangt man aber, wenn man die bekannte für ein positives a geltende Formel

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az}\,dz$$

in Anwendung bringt, indem man $a = C - l(1+t)$ setzt, was jederzeit erlaubt ist, da man t jederzeit so klein und nöthigenfalls negativ nehmen kann, so dass $C - l(1+t)$ positiv ausfällt. Es wird dann

$$u = \int_0^\infty e^{-[C-l(1+t)]z}\,dz$$

d. i. kürzer

$$9)\quad u = \int_0^\infty (1+t)^z e^{-Cz}\,dz.$$

Die Formel 2) giebt jetzt für $t = 0$,

$$10)\quad y_n = \int_0^\infty \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots.n}\,e^{-Cz}\,dz.$$

Man kann die hier postulirte Integration leicht ausführen, wenn man das Produkt

$$z(z-1)(z-2)\ldots.(z-\overline{n-1})$$

$$= \overset{n}{A}_0 z - \overset{n}{A}_1 z^{n-1} + \overset{n}{A}_2 z^{n-2} - \ldots. + (-1)^{n-1}\overset{n}{A}_{n-1} z$$

setzt und jedes einzelne Glied integrirt. Man findet so

$$y_n = \frac{1}{C^{n+1}}\overset{n}{A}_0 - \frac{1}{nC^n}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{n(n-1)C^{n-2}}\overset{n}{A}_2 - \ldots.$$

wobei die durch A bezeichneten Zahlen mit den Fakultätencoeffizienten identisch sind.

Es verdient übrigens noch erinnert zu werden, dass die so eben auseinandergesetzte Integrationsmethode unter Umständen auf unrich-

Digitized by Google

tige Resultate führen kann. Die Gleichung 1) nämlich, von welcher die Rechnung ihren Auslauf nimmt, ist eine rein hypothetische und beruht namentlich auf der Voraussetzung, dass die Reihe $y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots$ wenigstens innerhalb eines gewissen auf t bezüglichen Intervalles convergire; entschieden unrichtig aber ist jene Gleichung, wenn die in Rede stehende Reihe für alle t divergirt, weil eine divergirende Reihe keine bestimmte Summe hat und ebendeswegen keiner bestimmten Grösse u gleichgesetzt werden darf. Ob nun jene Reihe convergirt oder divergirt, lässt sich *a priori* nicht entscheiden, da ihre Coeffizienten unbekannt sind, und man muss daher am Ende der Rechnung *a posteriori* diese Untersuchung führen oder kürzer eine einfache Probe machen, ob in der That der gefundene Werth von y_n der gegebenen Differenzengleichung genügt. Wäre z. B. die Differenzengleichung

$$y_{n+1} = n y_n$$

zu integriren, so ist durch Multiplikation von t^n und Addition für $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$y_1 + y_2 t + y_3 t^2 + y_4 t^3 + \ldots$$
$$= t\left\{y_1 + 2y_2 t + 3y_3 t^2 + 4y_4 t^3 + \ldots\right\}$$

d. i. unter Voraussetzung von $u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots$

$$\frac{u - y_0}{t} = t\,\frac{du}{dt}$$

hieraus erhält man zunächst

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{du}{u - y_0}$$

ferner durch Integration beider Theile

$$C - \frac{1}{t} = l(u - y_0)$$

und daraus

$$u = y_0 + e^C . e^{-\frac{1}{t}}.$$

Es wäre nun y_n der Coeffizient von t^n in der Entwickelung dieses Ausdruckes nach steigenden Potenzen von n; eine solche Entwickelung existirt aber gar nicht, wie dem Ausdrucke $e^{-\frac{1}{t}}$ leicht anzuse-

Digitized by Google

ben ist, und daher kommt man hier zu keinem Ergebnisse. Dieses anscheinend befremdliche Resultat erklärt sich sehr einfach aus der Bemerkung, dass $y_n = C.1.2.3..(n-1)$ das Integral unserer Differenzengleichung ist und die Reihe $t + 1.t^2 + 1.2.t^3 + 1.2.3.t^4 + \ldots$ mithin auch die Reihe $y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots$ für alle t divergirt; es war mithin die Voraussetzung, dass die Summe dieser Reihe eine bestimmte Funktion u von t sein sollte, eine völlig unrichtige. Setzt man dagegen $y_n = \frac{1}{z_n}$, so geht die gegebene Differenzengleichung in die folgende $z_n = (n+1)z_{n+1}$ über, welche formell in der in No. 3) behandelten nicht verschieden und nach dem besprochenen Verfahren integrirbar ist.

Die bisher entwickelten Integrationsmethoden enthalten alle die Mittel, deren man sich zur Zeit bedienen kann, um Aufgaben über die Differenzengleichungen zu lösen. Man wird von selbst bemerken, dass keine dieser Methoden eine vollständig durchgreifende und unter allen Umständen zum allgemeinen Integrale führende ist und man kann daher nur wünschen, dass eine solche Methode noch erfunden werden möge. Noch ungleich fühlbarer ist dieser Mangel eines allgemeinen Verfahrens in dem Falle, wo die Differenzengleichung den ersten Grad übersteigt; eine nur einigermassen allgemeine Methode zur Integration derartiger Differenzengleichungen existirt bis jetzt gar nicht und man muss daher in jedem einzelnen Falle durch einen besonderen Kunstgriff, wie ihn eben die Natur der gegebenen Differenzengleichung zulässt, die Integration zu ermöglichen suchen. Glücklicherweise kommen Differenzengleichungen höherer Grade nur so äusserst selten vor, dass die bezeichnete Lücke der theoretischen Wissenschaft keinen bedeutenden Nachtheil für die Praxis herbeiführt.

§. 9.

Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Sowie man jede Differenzengleichung mit einer unabhängigen Variablen als die Aufgabe betrachten kann: „aus einer Rekursionsfor-

Digitized by Google

mel zwischen einigen der Grössen y_0, y_1, y_2, ... y_x, y_{x+1} etc. die independente Form von y_x herzuleiten“, so lässt sich auch jeder Differenzengleichung mit zwei unabhängigen Variablen eine ähnliche Bedeutung unterlegen, welche von der Betrachtung der Reihen mit doppeltem Eingange hergenommen ist. Eine solche Reihe bilden z. B. die Binomialcoeffizienten, welche in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind.

	0	1	2	3			...	t
1	1	.	.	.	.	.	...	$y_{1,t}$
2	1	2	1	.	.	.	...	$y_{2,t}$
3	1	3	3	1	.	.	...	$y_{3,t}$
4	1	4	6	4	1	.	...	$y_{4,t}$
5	1	5	10	10	5	1	...	$y_{5,t}$
.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.	.		
x	$y_{x,0}$	$y_{x,1}$	$y_{x,2}$	$y_{x,3}$	$y_{x,4}$	$y_{x,5}$	...	$y_{x,t}$

Hier enthält die erste Vertikalreihe links $(1, 2, 3, .. x)$ die Exponenten und die erste Horizontalreihe $(1, 2, 3, ... t)$ die Indices, so dass also $y_{x,t}$ den Coeffizienten von α^t in der Entwickelung von $(1+\alpha)^x$ darstellt. Die obige Doppelreihe ist gebildet mittelst folgender Regeln; erstlich findet die Relation

$$1)\quad y_{x+1,t+1} = y_{x,t+1} + y_{x,t}$$

statt, zweitens ist immer $y_{x,0} = 1$, welchen Werth x haben möge und endlich $y_{x,t} = 0$, sobald $1 > x$ wird. Hier kann man nun die Aufgabe stellen, aus der Rekursionsformel in No. 1) die independente Form von $y_{x,t}$ herzuleiten und diese Aufgabe ist keine andere als die der Integration der Differenzengleichung 1), welche zwei unabhängige Variablen (x und t) besitzt. Auf gleiche Weise lässt sich jede Differenzengleichung zwischen zwei Variablen interpretiren und zugleich ersieht man leicht, dass jede derartige Gleichung, wenn sie vom ersten Grade und der n^{ten} Ordnung sein soll, unter folgender Form enthalten ist:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} Py_{x,t} + Qy_{x+1,t} + Ry_{x+2,t} + \dots + Ty_{x+n,t} \\ \quad + Q'y_{x,t+1} + R'y_{x+1,t+1} + \dots + T'y_{x+n,t+1} \\ \qquad\qquad + R''y_{x,t+2} + \dots + T''y_{x+n,t+2} \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + T^{(n)}y_{x+n,t+n} \end{array}\right\} = 0$$

worin $P, Q, \ldots T, Q', R' \ldots T', R'' \ldots T'', \ldots T^{(n)}$ Funktionen von x und t bezeichnen. Da es keine allgemeine Methode zur Integration dieser Differenzengleichung giebt, so wollen wir wenigstens dasjenige Verfahren auseinandersetzen, welches den direktesten Weg zur Integration selbst einschlägt und in den Fällen, wo die Gleichung nicht gar zu complizirt ist, auch gewöhnlich zur Kenntniss von $y_{x,t}$ führt. Dieses Verfahren besteht ganz einfach darin, der Reihe nach $y_{x,1}$, $y_{x,2}$, $y_{x,3}$, etc. zu bestimmen, daraus durch Induktion die Form von $y_{x,t}$ zu erschliessen und über die Richtigkeit derselben durch die gegebene Differenzengleichung selbst zu entscheiden. Es wäre nicht schwer, diese Methode in Zeichen genauer darzustellen, da aber die hiermit verbundene Weitläufigkeit der Deutlichkeit wenig nützen würde, so ziehen wir es vor, dieselbe an einigen Beispielen zu erläutern.

I. Es sei folgende Doppelreihe gegeben.

	0	1	2	3	4	. . .	t
1	1						
2	1	1					
3	1	3	3				
4	1	6	15	15			
5	1	10	45	105	105		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
x	.	.	.	.	.	. . .	$y_{x,t}$

in welcher erstlich die Beziehung

$$2)\quad y_{x+1,t+1} = y_{x,t+1} + (x+t)y_{x,t}$$

statt findet und ausserdem $y_{x,0} = 1$ ist für jedes x und $y_{x,t} = 0$, sobald $t = x$ wird. Nehmen wir zuerst $t = 0$, so folgt

Digitized by Google

$$y_{x+1,1} = y_{x,1} + x$$

$$\text{d. h. } \Delta y_{x,1} = x$$

und hieraus folgt sogleich wegen $\Delta x = 1$

$$3) \quad y_{x,1} = \Sigma x = \frac{x(x-1)}{2} + C.$$

Die Constante ist aber Null, weil überhaupt $y_{t,t} = 0$ ist und unser Ausdruck für $x = 1$ sich von selbst annullirt. Nehmen wir jetzt in No. 2) $t = 1$; so folgt unter Benutzung des so eben gefundenen Resultates

$$y_{x+1,2} = y_{x,2} + (x+1)\frac{x(x-1)}{2}$$

$$\text{d. i. } \Delta y_{x,2} = \frac{(x+1)x(x-1)}{2}$$

und daraus ergiebt sich durch Integration

$$4) \quad y_{x,2} = \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{2\,.\,4}$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil $y_{2,2} = 0$ wird, wie es sein muss. Aus No. 2) folgt weiter für $t = 2$,

$$y_{x+1,3} = y_{x,3} + (x+2)\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{2\,.\,4}$$

$$\text{d. i. } \Delta y_{x,3} = \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{2\,.\,4}$$

und durch Integration

$$5) \quad y_{x,3} = \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}{2\,.\,4\,.\,6}.$$

Vergleicht man die Ausdrücke für $y_{x,1}$, $y_{x,2}$, $y_{x,3}$ in No. 3), 4) und 5) mit einander, so sieht man sich zu der Erwartung berechtigt, dass

$$6) \quad y_{x,t} = \frac{(x+t-1)(x+t-2)\,..\,(x+1)x(x-1)\,...\,(x-t)}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2t)}$$

sein werde und da dieser Ausdruck in der That die gegebene Differenzengleichung befriedigt, so bildet er das gesuchte allgemeine Glied in der aufgestellten Doppelreihe.

Digitized by Google

II. Die nachstehende Doppelreihe

	1	2	3	4	5	...	t
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.	.		
x	.	.	.	.	.	...	$y_{x,t}$

ist nach folgenden Gesetzen gebildet: man hat erstlich die Rekursionsformel

$$7)\quad y_{x+1,t+1} = (t+1)y_{x,t+1} + y_{x,t}$$

ferner ist $y_{x,1} = 1$ und $y_{x,t} = 1$ wenn $t = x$. — Nehmen wir in No. 7) zuerst $t = 1$, so folgt

$$y_{x+1,2} = 2y_{x,2} + 1.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Coeffizienten; integrirt man dieselbe nach dem in §. 3. auseinander gesetzten Verfahren, so folgt

$$y_{x,2} = C\left(2^x - \frac{1}{C}\right)$$

wo C die Integrationskonstante bedeutet. Da $y_{t,t} = 1$ ist, so folgt für $x = 2$, $1 = 4C - 1$ oder $C = \frac{1}{2}$ und mithin

$$8)\quad y_{x,2} = \tfrac{1}{2}\,(2^x - 2).$$

Aus No. 7) ergiebt sich nun weiter für $t = 2$ unter Benutzung des gefundenen Resultates

$$y_{x+1,3} = 3y_{x,3} + \tfrac{1}{2}\,(2^x - 2).$$

Um sie rasch zu integriren setzen wir $y_{x,3} = 3^x u_x$, so wird

$$u_{x+1} = u_x + \frac{1}{2.3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}$$

Digitized by Google

d. i.

$$\Delta u_x = \frac{1}{2.3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}$$

und daraus findet sich sogleich durch Integration

$$u_x = \frac{1}{2.3}\left\{-3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\} + C$$

und

$$y_{x,3} = C3^x - \tfrac{1}{2}2^x + \tfrac{1}{2}1^x.$$

Die Constante C bestimmt sich durch die Spezialisirung $x = 3$, wodurch $y_{x,3} = y_{3,3} = 1$ wird. Es ergiebt sich $C = \frac{1}{6}$ und man hat dann

$$9)\quad y_{x,3} = \frac{1}{2.3}\,(3^x - 3\,.\,2^x + 3\,.\,1^x).$$

Für $t = 3$ liefert die Gleichung 7) die weitere Spezialgleichung

$$y_{x+1,4} = 4y_{x,4} + \frac{1}{2.3}\,(3^x - 3\,.\,2^x + 3\,.\,1^x),$$

welche mit Hülfe der Substitution $y_{x,4} = 4^x v_x$ leicht zu integriren ist. Führt man die kleine Rechnung aus und bestimmt am Ende den Werth der Integrationskonstanten, so findet man ohne Mühe

$$y_{x,4} = \frac{1}{2.3.4}\,(4^x - 4\,.\,3^x + 6\,.\,2^x - 4\,.\,1^x)$$

und wenn man nun die bisherigen Werthe von $y_{x,1}$, $y_{x,2}$, $y_{x,3}$, $y_{x,4}$ mit einander vergleicht, so gelangt man induktorisch zu der Formel

$$10)\quad y_{x,t} = \frac{1}{1.2.3..t}\left\{t^x - t_1(t-1)^x + t_2(t-2)^x - \ldots\right\}$$

wobei t_1, t_2, t_3, .. die Binomialkoeffizienten t, $\frac{1}{2}t(t-1)$, $\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)$ etc. bedeuten. In der That befriedigt die vorstehende Annahme für $y_{x,t}$ die in No. 7) aufgestellte Differenzengleichung, wovon man sich durch eine leichte Rechnung überzeugen kann, und es ist somit das allgemeine Glied der gegebenen Doppelreihe durch die Formel 10) independent bestimmt.

III. Die zu integrirende Differenzengleichung sei

$$11)\quad y_{x+1,t+1} = y_{x,t+1} + a_{x,t}\,y_{x,t}$$

und darin $a_{x,t}$ eine gegebene Funktion von x und t. Nehmen wir zuerst $t = 0$, so folgt

Digitized by Google

$$y_{x+1,1} = y_{x,1} + a_{x,0}\,y_{x,0}$$

oder

$$\Delta y_{x,1} = a_{x,0}\,y_{x,0}$$

und hieraus durch Integration

$$y_{x,1} = \Sigma a_{x,0}\,y_{x,0}.$$

Aus No. 11) wird nun weiter für $t = 1$

$$y_{x+1,2} = y_{x,2} + a_{x,1}\,y_{x,1}$$

oder

$$\Delta y_{x,2} = a_{x,1}\,\Sigma a_{x,0}\,y_{x,0}$$

und durch Integration

$$y_{x,2} = \Sigma a_{x,1}\,\Sigma a_{x,0}\,y_{x,0}.$$

Man wird auf der Stelle den weiteren Fortgang dieses Verfahrens erkennen, durch welches man für $y_{x,t}$ die Formel

$$12)\quad y_{x,t} = \Sigma a_{x,t-1}\,\Sigma a_{x,t-2}\ldots\Sigma a_{x,1}\,\Sigma a_{x,0}\,y_{x,0}$$

erhält. Sind keine näheren Bestimmungen über die Anfangsglieder der durch die Differenzengleichung 11) charakterisirten Doppelreihe gemacht, so ist $y_{x,0}$ noch unbestimmt und kann daher als eine willkührliche Funktion von x betrachtet werden, ebenso unbestimmt bleiben auch die Constanten, welche man jeder einzelnen in No. 12) angedeuteten Integration beifügen kann. In dem Falle wo $a_{x,t}$ eine constante Grösse etwa k ist, vereinfacht sich der Ausdruck 12) sehr und giebt

$$y_{x,t} = k^t\Sigma^{(t)}y_{x,0}$$

wo man nun $\Sigma^{(t)}y_{x,0}$ nach den Lehren des §. 16. in II. transformiren kann, wenn man $y_{x,0}$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet. — Man erkennt aus diesem Beispiele, dass das Integral einer Differenzengleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen eine willkührliche Funktion enthält und wird sich leicht überzeugen, dass überhaupt immer soviele willkührliche Funktionen vorhanden sein müssen, als die Ordnung der Differenzengleichung Einheiten zählt. Man hat in dieser Bemerkung ein Kriterium, ob ein gefundenes Integral das allgemeine Integral der Differenzengleichung oder nur ein partikuläres ist.

Digitized by Google

§. 10.

Fortsetzung.

Wenn die zu integrirende Differenzengleichung nur konstante Coefficienten besitzt, so kann man noch auf einem anderem Wege zu ihrem Integrale gelangen. Um dies zu zeigen betrachten wir zuerst die Differenzengleichung

$$1)\quad Ay_{x,t} + A'y_{x+1,t} + By_{x,t+1} + B'y_{x+1,t+1} = 0$$

und nehmen hier die Substitution

$$2)\quad y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$$

vor, wobei a, α und β noch unbestimmte Konstanten bezeichnen. Die gegebene Differenzengleichung verwandelt sich dann in die algebraische Gleichung

$$3)\quad A + A'\alpha + B\beta + B'\alpha\beta = 0$$

woraus folgt

$$\beta = -\frac{A + A'\alpha}{B + B'\alpha}$$

und dies giebt denn als Integral von No. 1)

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(-\frac{A + A'\alpha}{B + B'\alpha}\right)^t$$

wo nun a und α noch ganz beliebig sind. Trotzdem ist aber unser Ausdruck nicht das allgemeine Integral der gegebenen Differenzengleichung, weil er keine willkührliche Funktion von x enthält; man gelangt jedoch zu dem allgemeinen Integrale auf folgendem Wege. Es ist identisch

$$\left(-\frac{A + A'\alpha}{B + B'\alpha}\right)^t = \left(-\frac{A'}{B'}\right)^t\left(1 + \frac{A}{A'\alpha}\right)^t\left(1 + \frac{B}{B'\alpha}\right)^{-t}$$

und da man α jederzeit so gross nehmen kann, dass gleichzeitig $A'\alpha > A$ und $B'\alpha > B$ ist, so lassen sich der zweite und dritte Faktor rechter Hand in Reihen verwandeln, welche nach Potenzen von $\frac{1}{\alpha}$ fortschreiten. Man kann daher

Digitized by Google

$$4)\quad \left(-\frac{A + A'\alpha}{B + B'\alpha}\right)^t$$

$$= T_0 + T_1 \frac{1}{\alpha} + T_2 \frac{1}{\alpha^2} + T_3 \frac{1}{\alpha^3} + \ldots..$$

setzen, worin die mit T bezeichneten Coefficienten nur von A, A', B, B' und t abhängen. Diese Schlüsse erleiden jedoch eine kleine Modification, wenn eine der Grössen A, A', B, B' verschwindet. Für $A = 0$ ändert sich nichts wesentlich, für $A' = 0$ würde

$$5)\quad \left(-\frac{A}{B + B'\alpha}\right)^t = \left(-\frac{A}{B'\alpha}\right)^t \left(1 + \frac{B}{B'\alpha}\right)^{-t}$$

$$= T_0\alpha^{-t} + T_1\alpha^{-t-1} + T_2\alpha^{-t-2} + \ldots..$$

zu setzen sein, für $B = 0$ bleibt die Form 4) richtig und für $B' = 0$ hätte man

$$6)\quad \left(-\frac{A + A'\alpha}{B}\right)^t = \left(-\frac{A'\alpha}{B}\right)^t \left(1 + \frac{A}{A'\alpha}\right)^t$$

$$= T_0\alpha^t + T_1\alpha^{t-1} + T_2\alpha^{t-2} + \ldots..$$

Die drei verschiedenen Formen 4), 5) und 6) lassen sich leicht in eine einzige zusammenfassen indem man

$$7)\quad \left(-\frac{A + A'\alpha}{B + B'\alpha}\right)^t$$

$$= T_0\alpha^{\mu t} + T_1\alpha^{\mu t-1} + T_2\alpha^{\mu t-2} + \ldots..$$

setzt, wo μ entweder $= 0$ oder $= -1$ oder $= +1$ ist. Es wird jetzt

$$y_{x,t} = T_0 a\alpha^{x+\mu t} + T_1 a\alpha^{x+\mu t-1} + T_2 a\alpha^{x+\mu t-2} + \ldots$$

Da die Konstanten a und α noch willkührlich sind, so können wir der Reihe nach auch b und β, c und γ etc. an ihre Stelle treten lassen und erhalten so weiter

$$y_{x,t} = T_0 b\beta^{x+\mu t} + T_1 b\beta^{x+\mu t-1} + T_2 b\beta^{x+\mu t-2} + \ldots$$

$$y_{x,t} = T_0 c\gamma^{x+\mu t} + T_1 c\gamma^{x+\mu t-1} + T_2 c\gamma^{x+\mu t-2} + \ldots$$

. . . .

Man übersieht weiter, dass diese verschiedenen Werthe von $y_{x,t}$ eine Reihe partikulärer Integrale darstellen und dass daher das allgemeine Integral aus ihrer Summe bestehen muss. So wird denn

Digitized by Google

$$y_{x,t} = T_0(a\alpha^{x+\mu t} + b\beta^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \ldots)$$
$$+ T_1(a\alpha^{x+\mu t-1} + b\beta^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \ldots)$$
$$+ T_2(a\alpha^{x+\mu t-2} + b\beta^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \ldots)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo jede der in Parenthesen stehenden Horizontalreihen von der Form

$$a\alpha^u + b\beta^u + c\gamma^u + \ldots\ldots$$

ist. Da hierin a, b, c, ... und ebenso α, β, γ ... völlig willkührliche Grössen sind, so darf man die Summe dieser Reihe als eine willkührliche Grösse von u betrachten und demgemäss mit $\varphi(u)$ bezeichnen; so ergiebt sich jetzt das allgemeine Integral

8) $$y_{x,t} = T_0\varphi(x+\mu t) + T_1\varphi(x+\mu t-1) + T_2\varphi(x+\mu t-2) + \ldots$$

Die Bedeutung der hier vorkommenden willkührlichen Funktion φ ist leicht zu erkennen; für $t = 0$ nämlich wird

$$y_{x,0} = T_0\varphi(x) + T_1\varphi(x-1) + T_2\varphi(x-2) + \ldots.$$

oder weil $T_0 = 1$, $T_1 = T_2 = T_3 \ldots = 0$ ist, wie man aus der Gleichung 7) für $t = 0$ ersieht,

$$y_{x,0} = \varphi(x)$$

so dass man also statt der Formel 8) auch die folgende nehmen kann

9) $$y_{x,t} = T_0 y_{x+\mu t,0} + T_1 y_{x+\mu t-1,0} + T_2 y_{x+\mu t-2,0} + \ldots.$$

welche nun das allgemeine Integral der Gleichung 1) darstellt.

In den beiden Fällen $B = 0$ und $B' = 0$ kann man die Werthe von T_0, T_1, T_2, ... ohne Weitläufigkeit entwickeln; für $B = 0$ hat man nämlich

$$\left(-\frac{A + A'\alpha}{B'\alpha}\right)^t = \left(-\frac{A'}{B'}\right)^t\left(1 + \frac{A}{A'}\frac{1}{\alpha}\right)^t$$

und wenn $-\frac{A'}{B'} = a$, $\frac{A}{A'} = b$ gesetzt wird, so ist dieser Ausdruck

$$= t_0 a^t + t_1 a^t b\frac{1}{\alpha} + t_2 a^t b^2\frac{1}{\alpha^2} + \ldots\ldots$$

also $\mu = 0$, $T_0 = t_0 a^t$, $T_1 = t_1 a^t b$, $T_2 = t_2 a^t b^2$ etc. und folglich

10) $$y_{x,t} = a^t\left\{t_0 y_{x,0} + t_1 b y_{x-1,0} + \ldots + t_t b^t y_{x-t,0}\right\}$$

wobei t als ganze positive Zahl vorausgesetzt ist.

Digitized by Google

Für $B' = 0$ hat man

$$\left(-\frac{A + A'\alpha}{B}\right)^t = \left(-\frac{A'}{B}\right)^t \alpha^t \left(1 + \frac{A}{A'}\frac{1}{\alpha}\right)^t$$

und für $-\frac{A'}{B} = a$, $\frac{A}{A'} = b$ ist dies

$$= a^t t_0 \alpha^t + a^t t_1 b \alpha^{t-1} + a^t t_2 b^2 \alpha^{t-2} + \dots$$

Daraus folgt $\mu = +1$, und überhaupt

$$11) \quad y_{x,t} = a^t \left\{ t_0 y_{x+t,0} + t_1 b y_{x+t-1,0} + \dots + t_t b^t y_{x,0} \right\}$$

wobei t wieder als ganse positive Zahl vorausgesetzt worden ist.

Mit einer kleinen Modifikation ist die Integrationsmethode, welche wir hier auseinandergesetzt haben, auch auf Gleichungen von höheren Ordnungen annehmbar. Um z. B. die allgemeine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Coeffizienten

$$\left.\begin{array}{l} A_{x,t} + A'y_{x+1,t} + A''y_{x+2,t} \\ \quad + By_{x,t+1} + B'y_{x+1,t+1} \\ \quad\quad + Cy_{x,t+2} \end{array}\right\} = 0$$

zu integriren, setzen wir wieder

$$12) \quad y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$$

und erhalten jetzt zwischen α und β folgende Relation

$$13) \quad \left.\begin{array}{l} A + A'\alpha + A''\alpha^2 \\ \quad + B\beta + B'\alpha\beta \\ \quad\quad + C\beta^2 \end{array}\right\} = 0$$

Wollte man diese Gleichung ebenso behandeln, wie es früher mit der Gleichung 3) geschah, also β durch α ausdrücken, so würde man auf grosse Weitläufigkeiten stossen; diese lassen sich einigermassen umgehen, wenn man der Reihe nach $\beta^2, \beta^3, \beta^4$; .... β^t durch α und die erste Potenz von β darstellt. Man hat nämlich

$$\beta^2 = \left\{\begin{array}{l} A + A'\alpha + A''\alpha^2 \\ + (B + B'\alpha)\beta \end{array}\right\} : (-C)$$

ferner $\beta^3 = \beta^2 . \beta$ also

$$\beta^3 = -\frac{A + A'\alpha + A''\alpha^2}{C}\beta$$

$$- \frac{B + B'\alpha}{C} \beta^2$$

wo man den Werth von β^2 aus der vorigen Gleichung substituiren kann. Auf gleiche Weise erhält man nachher $\beta^4 = \beta^3 . \beta$, indem man für β^2 wieder die erste Gleichung substituirt Indem man so fort geht ersieht man die Möglichkeit y^t unter folgender Form darzustellen:

$$\beta^t = T_{0,0} + T_{1,0}\alpha + T_{2,0}\alpha^2 + \ldots + T_{t,0}\alpha^t$$
$$+ T_{0,1}\beta + T_{1,1}\alpha\beta + T_{2,1}\alpha^2\beta + \ldots + T_{t-1,1}\alpha^{t-1}\beta$$

wobei die mit T bezeichneten Coeffizienten nur von A , A' , A'' , B , B' , C und t abhängen. Hieraus folgt nun durch Multiplikation mit $a\alpha^x$,

$$y_{x,t} = T_{0,0}a\alpha^x + T_{1,0}a\alpha^{x+1} + \ldots + T_{t,0}a\alpha^{x+t}$$
$$+ T_{0,1}a\alpha^x\beta + T_{1,1}a\alpha^{x+1}\beta + \ldots + T_{t-1,1}a\alpha^{x+t-1}\beta.$$

Man bildet nun aus diesem partikulären Integrale unserer Differenzengleichung das allgemeine Integral derselben, indem man an die Stelle von $a\alpha^x$ eine willkührliche Funktion von x etwa $\varphi_0(x)$ und ebenso an die Stelle von $a\alpha^x\beta$ eine zweite beliebige Funktion $\varphi_1(x)$ treten lässt; es wird dann

$$14)\quad y_{x,t} = T_{0,0}\varphi_0(x) + T_{1,0}\varphi_0(x+1) + \ldots + T_{t,0}\varphi_0(x+t)$$
$$+ T_{0,1}\varphi_1(x) + T_{1,1}\varphi_1(x+1) + \ldots + T_{t-1,1}\varphi_1(x+t-1).$$

Die Bedeutung der Funktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ ist leicht zu erkennen; denn für $t = 0$ reduzirt sich β^t auf 1 und mithin verschwinden alle T bis auf das erste $T_{0,0} = 1$; daher folgt jetzt aus No. 14)

$$y_{x,0} = \varphi_0(x)$$

für $t = 1$ dagegen wird $\beta^t = \beta$ und mithin annulliren sich wieder alle T mit Ausnahme von $T_{0,1} = 1$, so dass jetzt

$$y_{x,1} = \varphi_1(x)$$

folgt. Demnach kann man die Gleichung 14) auch in folgender Form darstellen:

$$15)\quad y_{x,t} = T_{0,0}y_{x,0} + T_{1,0}y_{x+1,0} + \ldots + T_{t,0}y_{x+t,0}$$
$$+ T_{0,1}y_{x,1} + T_{1,1}y_{x+1,1} + \ldots + T_{t-1,1}y_{x+t-1,1}.$$

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich die Differenzengleichung n^{ter} Ordnung

$$16)\quad \left.\begin{array}{l} Ay_{x,t} + A'y_{x+1,t} + A''y_{x+2,t} + \dots + A^{(n)}y_{x+n,t} \\ + By_{x,t+1} + B'y_{x+1,t+1} + \dots + B^{(n-1)}y_{x+n-1,t+1} \\ \quad + Cy_{x,t+2} + \dots + C^{(n-2)}y_{x+n-2,t+2} \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + Ny_{x,t+n} \end{array}\right\} = 0$$

behandeln. Man setzt nämlich zunächst

$$y = a\alpha^x\beta^t$$

und findet dann für α und β die Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + A'\alpha + A''\alpha^2 + \dots + A^{(n)}\alpha^n \\ + B\beta + B'\alpha\beta + \dots + B^{(n-1)}\alpha^{n-1}\beta \\ \quad + C\alpha\beta^2 + \dots + C^{(n-2)}\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + N\beta^n \end{array}\right\} = 0$$

welche dazu dient um β^n durch die gegebenen Coeffizienten und durch α, α^2, ... α^n, β, β^2, ... β^{n-1} auszudrücken. Multiplicirt man die so entstandene Gleichung ($\beta^n =$ etc.) mit β, so erhält man links β^{n+1} und rechts kommt auch β^n vor, welches man vermöge der eben angedeuteten Gleichung für β^n wieder durch die niedrigeren Potenzen von β ausdrückt. Nochmalige Multiplikation mit β und nachherige Substitution von β^n führt dann weiter zur Kenntniss von β^{n+2} und indem man so fortschreitet, kann man β^t für $t > n - 2$ auf folgende Weise darstellen:

$$17)\quad \begin{array}{l} \beta^t = T_{0,0} + T_{1,0} + T_{2,0}\alpha^2 + \dots + T_{t,0}\alpha^t \\ \quad + T_{0,1}\beta + T_{1,1}\alpha\beta^2 + \dots + T_{t-1,1}\alpha^{t-1}\beta \\ \quad\quad + T_{0,2}\beta^2 + \dots + T_{t-2,2}\alpha^{t-2}\beta^2 \\ \quad\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad + T_{t+n-1,n-1}\alpha^{t-n+1}\beta^{n-1}. \end{array}$$

Multiplizirt man dies mit $a\alpha^x$, so erhält man ein partikuläres Integral unserer Differenzengleichung und man leitet hieraus das allgemeine Integral ab, indem man an die Stellen von

$$a\alpha^x\,,\ a\alpha^x\beta\,,\ a\alpha^x\beta^2\,,\ \dots$$

d. i. willkührlichen Funktionen

$$\varphi_0(x)\,,\ \varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \dots$$

treten lässt, so ergiebt sich das allgemeine Integral:

Digitized by Google

$$18)\quad y_{x,t} = T_{0,0}\varphi_0(x) + T_{1,0}(x+1) + T_{2,0}\varphi_0(x+2) \\ + \ldots + T_{t,0}\varphi_0(x+t) \\ + T_{0,1}\varphi_1(x) + T_{1,1}\varphi_1(x+1) + \ldots + T_{t-1,1}\varphi_1(x+t-1) \\ + T_{0,2}\varphi_2(x) + \ldots + T_{t-2,2}\varphi_2(x+t-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + T_{t-n+1,n-1}\varphi_{n-1}(x+t-n+1).$$

Um die willkührlichen Funktionen zu bestimmen nehmen wir der Reihe nach $t = 0, 1, 2, \ldots n-1$, wodurch β^t in $1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{n-1}$ übergeht. Mit No. 17) verglichen, folgt daraus, dass den Fällen $t = 0, 1, 2, \ldots n-1$ die nachstehenden Gleichungen entsprechen:

$$T_{0,0} = 1,\ T_{1,0} = 0,\ T_{2,0} = 0, \ldots . \\ T_{0,1} = 0,\ T_{1,1} = 1,\ T_{2,1} = 0, \ldots . \\ T_{0,2} = 0,\ T_{1,2} = 0,\ T_{2,2} = 1, \ldots . \\ \text{etc.}$$

und wenn man jetzt diese Substitutionen in der Gleichung 18) vornimmt, so ergeben sich der Reihe nach die Formeln

$$y_{x,0} = \varphi_0(x),\ y_{x,1} = \varphi_1(x),\ y_{x,2} = \varphi_2(x)\ \text{etc.},$$

wodurch die mit φ bezeichneten willkührlichen Funktionen ihre Bestimmung finden. Es ist dann nach No. 18)

$$y_{x,t} = T_{0,0}y_{x,0} + T_{1,0}y_{x+1,0} + T_{2,0}y_{x+2,0} \\ + \ldots + T_{t,0}y_{x+t,0} \\ + T_{0,1}y_{x,1} + T_{1,1}y_{x+1,1} + \ldots + T_{t-1,1}y_{x+t-1,1} \\ + T_{0,2}y_{x,2} + \ldots + T_{t-2,2}y_{x+t-2,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + T_{t-n+1,n-1}y_{x+t-n+1,n-1}$$

das allgemeine Integral der Differenzengleichung 16). Die Integrationsmethode, welche wir hier auseinandergesetzt haben, kann zwar auf den Namen einer allgemeinen Anspruch machen (vorausgesetzt, dass die Differenzengleichung konstante Koeffizienten besitzt und den ersten Grad nicht übersteigt), doch dürfen wir nicht verhehlen, dass dieselbe mit einer wahrhaft ermüdenden Weitläufigkeit verbunden sein kann, indem die Bestimmung der mit T bezeichneten Funktionen der Coeffizienten nur durch successive Elimination also nicht independent

Digitized by Google

geschieht, was die Wahrnehmung ihres Bilduugsgesetzes meistens sehr erschwert. Dagegen bietet die besprochene Methode den Vortheil, dass man wenigstens die F o r m des gesuchten Integrales erfährt und man kann sich dies in so fern zu Nutze machen, als es in manchen Fällen nicht so schwer ist, in der im voraus aufgestellten allgemeinen Form die Grössen T rückwärts durch einen dem besonderen Falle angepassten Kunstgriff zu bestimmen.

§. 11.

Differenzengleichungen mit mehreren unabhängigen Variablen.

Sowie eine Differenzengleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen als die Rekursionsformel angesehen werden kann, welche zwischen den Gliedern einer Doppelreihe statt findet, so lassen sich Differenzengleichungen mit drei, vier und mehreren Variablen als Beziehungen zwischen den Gliedern von Reihen mit drei-, vier- und überhaupt mehrfachem Eingange auffassen. Im Allgemeinen ist die Integration solcher Gleichungen ein im hohen Grade verwickeltes Geschäft und man kann es daher als ein Glück ansehen, dass sie nur sehr selten vorkommen. Das Verfahren selbst ist im Ganzen dasselbe wie bei den Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen, nur dass es hier der Natur der Sache nach noch weitläufigere Rechnungen erfordert wie dort. Man bestimmt nämlich die unbekannte Funktion $y_{x,t,u}$ dreier Veränderlichen dadurch, dass man successiv aus $y_{x,0,0}$ erst $y_{x,0,1}$, $y_{x,0,2}$, ... $y_{x,0,u}$ ableitet und darauf ${}_{x,1,u}$, $y_{x,2,u}$, ... $y_{x,t,u}$ der Reihe nach entwickelt. Dieselbe Methode ist auch auf eine grössere Anzahl von Variablen anwendbar. Nur in dem einen Falle, wo die Differenzengleichung konstante Coeffizienten besitzt, kann man sich eines Verfahrens bedienen, welches dem im vorigen Paragraphen benutzten völlig analog ist und dies wollen wir noch an einem einfachen Beispiele zeigen.

Die gegebene Differenzengleichung mit drei Veränderlichen sei:

Digitized by Google

$$Ay_{x,t,u} + By_{x+1,t,u} + Cy_{x+1,t+1,u} + Dy_{x+1,t+1,u+1}$$
$$+ B'y_{x,t+1,u} + C'y_{x+1,t,u+1}$$
$$+ B''y_{x,t,u+1} + C''y_{x,t+1,u+1}$$
$$= 0$$

so nehme man $y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, wo a, α, β, γ noch unbestimmte Konstanten sind; man findet jetzt durch Substitution, dass die gegebene Differenzengleichung in die folgende zwischen α, β, γ statt habende Bedingungsgleichung übergeht;

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha\beta + D\alpha\beta\gamma \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\gamma \\ \quad + B''\gamma + C''\beta\gamma \end{array}\right\} = 0$$

aus welcher man für γ den Werth

$$\gamma = -\frac{A + B\alpha + B'\beta + C\alpha\beta}{B'' + C'\alpha + C''\beta + D\alpha\beta}$$

erhält. Es ist daher, wenn dies in $y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\gamma^u$ eingeführt wird, der Ausdruck

$$y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\left(-\frac{A + B\alpha + B'\beta + C\alpha\beta}{B'' + C'\alpha + C''\beta + D\alpha\beta}\right)^u$$

ein Integral unserer Differenzengleichung nnd zwar ein partikuläres, weil keine willkührliche Funktion darin vorkommt. Giebt man γ die Form

$$\gamma = -\frac{C + \frac{B'}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{A}{\alpha\beta}}{C + \frac{C''}{\alpha} + \frac{C'}{\beta} + \frac{B''}{\alpha\beta}}$$

so erkennt man leicht, dass sich γ^u unter folgender Gestalt darstellen lässt:

$$\gamma^u = U_{0,0} + U_{1,0}\frac{1}{\alpha} + U_{2,0}\frac{1}{\alpha^2} + U_{3,0}\frac{1}{\alpha^3} + \dots$$
$$+ U_{0,1}\frac{1}{\beta} + U_{1,1}\frac{1}{\alpha\beta} + U_{2,1}\frac{1}{\alpha^2\beta} + \dots$$
$$+ U_{0,2}\frac{1}{\beta^2} + U_{1,2}\frac{1}{\alpha\beta^2} + \dots$$
$$+ U_{0,3}\frac{1}{\beta^3} + \dots$$
$$+ \text{etc.}$$

Digitized by Google

wo die mit U bezeichneten Coeffizienten nur von den gegebenen konstanten Grössen A, B, B', B'', C, C', C'', D und von u abhängig sind. Unser partikuläres Integral nimmt jetzt die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\,y_{x,t,u} = U_{0,0}\alpha^x\beta^t &+ U_{1,0}\alpha^{x-1}\beta^t + U_{2,0}\alpha^{x-2}\beta^t + \ldots \\ &+ U_{0,1}\alpha^x\beta^{t-1} + U_{1,1}\alpha^{x-1}\beta^{t-1} + \ldots \\ &+ U_{0,2}\alpha^x\beta^{t-2} + \ldots \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Multiplizirt man mit a herüber und lässt jetzt an die Stelle von

$$a\alpha^x\beta^t$$

eine willkührliche Funktion von x und t treten, so geht unser partikuläres Integral in das allgemeine Integral über nämlich

$$\begin{aligned}y_{x,t,u} = U_{0,0}\varphi(x,t) &+ U_{1,0}\varphi(x-1,t) + U_{2,0}\varphi(x-2,t) + \ldots \\ &+ U_{0,1}\varphi(x,t-1) + U_{1,1}\varphi(x-1,t-1) + \ldots \\ &+ U_{0,2}\varphi(x,t-2) + \ldots \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Setzt man in dem Werthe von β^u speziell $u = 0$, so wird $\beta^u = 1$ und mithin

$$\begin{aligned}U_{0,0} = 1\ ,\ U_{1,0} &= U_{2,0} = U_{3,0} \ldots = 0 \\ U_{0,1} &= U_{1,1} = U_{2,1} \ldots = 0 \\ U_{0,2} &= U_{1,2} \ldots = 0 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

und wenn man dies für die obige Gleichung benutzt, indem man auch dort $u = 0$ setzt, so wird

$$y_{x,t,0} = \varphi(x,t)$$

d. h. es findet die willkührliche Funktion φ ihre Bestimmung. Man kann demnach dem allgemeinen Integrale auch die nachstehende Form ertheilen:

$$\begin{aligned}y_{x,t,u} = U_{0,0}y_{x,t,0} &+ U_{1,0}y_{x-1,t,0} + U_{2,0}y_{x-2,t,0} + \ldots \\ &+ U_{0,1}y_{x,t-1,0} + U_{1,1}y_{x-1,t-1,0} + \ldots \\ &+ U_{0,2}y_{x,t-2,0} + \ldots \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Digitized by Google

Zur Vervollständigung dieser Auflösung würde noch gehören, dass man die Werthe der mit *U* bezeichneten Coefficienten durch *A* , *B* , *B'* , *B''* , *C* , *C'* , *C''* , *D* und *U* ausgedrückt entwickelte; dies würde jedoch zu einem äusserst weitläufigen Calcül führen, wenn nicht mehrere der genannten Coefficienten = 0 sind. Auch hier besteht demnach der Vortheil, welcher die Methode darbietet, hauptsächlich nur darin, dass sie die Form des Integrales kennen lehrt und es wiederholt sich daher die Bemerkung, welche wir schon am Ende des vorigen Paragraphen gemacht haben.

Digitized by Google

Literarhistorisches.

Das erste Werk, in welchem eine systematische Darlegung der Differenzengleichung versucht wird, ist: *Methodus incrementorum directa et inversa, auctore Brook Taylor, Londini* 1718, dessen Studium nur leider durch die unbequeme Bezeichnung etwas erschwert wird. Eine wichtige Erweiterung erhielten jene Anfänge bald nachher durch die Schrift: *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, auctore Jac. Stirling, Londini* 1730, welche reich an Untersuchungen über die Summirung, Interpolation und Transformation der Reihen ist. Hier kommt u. A. die halbconvergente Reihe für $l(1.2.3...p)$ zum ersten Male vor und die betreffende Formel führt auch jetzt gewöhnlich noch den Namen ihres Urhebers. Neuere Darstellungen der Differenzenrechnung sind die von *Euler* in seiner Differenzialrechnung, von *Bossut* in der *Encyclopédie méthodique* (Artikel *différences finies*), von *Lacroix* im dritten Theile seines *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Par.* 1819 (Motto: *Tantum series juncturaque pollet; Horat.*), von *Schweins* in seiner der combinatorischen Schule angehörenden *Theorie der Differenzen und Differenziale, Heidelberg* 1825 und von *Oettinger* in seinem *Differenzial- und Differenzen-Calcul; Mainz* 1831. Was die einzelnen Lehren der direkten und indirekten

Digitized by Google

Differenzenrechnung anbetrifft, so haben wir der Reihe nach folgendes zu erwähnen:

Der Gedanke, die Formel $f(x+sh) = f(x) + s_1 \varDelta f(x) + s_2 \varDelta^2 f(x) +$ etc. in eine andere umzusetzen, welche nicht mehr Differenzen, sondern Differenzialquotienten enthält, gehört *Taylor* an, seine Ausführung aber blieb bisher immer mangelhaft, weil man auf den Rest der Reihe keine Rücksicht nahm; die in §. 6. gegebene Darstellung vermeidet diesen Fehler auf die von *J. Caqué* in *Liouville's Journal de Mathématiques Octobre* 1845 *pag.* 379 angegebenen Weise.

Die symbolischen Formeln, welche wir für die höheren Differenzen der Funktionen einer oder mehrerer Variablen mitgetheilt haben sind Schöpfungen von *Lagrange* und *Laplace*, worüber man die *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1772 und die *Théorie analytique des probabilités Livre* I. *Capp.* I. und II. nachsehen kann; der letzte grosse Analytiker hat dergleichen Formeln auch für die Summen aufgestellt, z. B.

$$\Sigma^{(n)}(u) = (e^{hD_x} - 1)^{-n} u$$

worin überhaupt $D_x^{-k} u$ für $\int_0^{(k)} u\,dx^k$ zu rechnen ist; diese und ähnliche Formeln sind aber nichts weniger als allgemein richtig, denn schon der einfachste Fall $n = 1$ führt im Allgemeinen auf halbconvergente Reihen, die man ohne gehörige Restbestimmung (wovon in *Laplace's* Formeln keine Rede ist) keiner bestimmten Funktion gleich setzen darf.

Ueber den Rest der von *Mac Laurin* herrührenden Formel 12 in §. 11. sind zuerst von *Poisson* einige scharfsinnige Untersuchungen angestellt worden (*Mémoires de l'academie des sciences Vol.* IV. *pag.* 571), weitere Betrachtungen finden sich darüber in *Crelle's Journal für Mathematik* zuerst von *Jacobi* (Bd. 12. S. 20, *de usu legitimo formulae summatoriae Maclauriniae*) und nachher von *Malmstén* (Bd. 35. S. 55, *sur la formule* $hu'_x = \varDelta u_x - \frac{1}{2} h \varDelta u'_x +$ etc.); der letzteren sind wir gefolgt, da sie ihren Gegenstand erschöpft.

Digitized by Google

Die schönen Formeln zur Verwandlung der endlichen Integrale in einfache bestimmte Integrale §§. 14, 15. und 16 im zweiten Theile) verdankt man dem genialen *Abel* (*Oeuvres complètes de Abel, tome II.* No. VII); dass die Coefficienten, welche in jenen Formeln vorkommen (S. 173) so nahe mit den Fakultätencoefficienten verwandt sind, scheint dem Verfasser entgangen zu sein.

Ueber die etwas weitläufige Lehre von der Integration der Differenzengleichungen findet man die tiefsten Untersuchungen bei *Laplace* (*Mémoires présentés tome VI et VII*, *Mémoires de l'academie des sciences* 1773 und *théorie analytique des probabilités*) zu deren Studium das vorliegende Werk als Vorbereitung dienen möge.

Digitized by Google

Verbesserungen.

S. 9 Formel 18) ist der Strich über $1-(x+h)^2$ zu ergänzen.

S. 9 Z. 6 v. u. statt $\cos a$ l. $\cos \alpha$.

S. 10 Z. 10 v. o. statt $\cot a$ l. $\cot \alpha$.

S. 15 Z. 8 v. o. statt recht l. rechts.

S. 16 Z. 18 v. o. ist die Parenthese hinter z^{s-1} zu streichen.

S. 21 Z. 17 v. o. statt $\Delta^2)$ l. $\Delta^2 y)$.

S. 47 Z. 5. v. u. statt $f^{(m-1)}$ l. $f^{(2m-1)}$.

S. 51 Z. 4 v. o. ist die Parenthese hinter $(\frac{1}{2})^{2m-5}$ zu streichen.

S. 59 Z. 8 v. o. statt $1.3.3\ldots(2m)$ l. $1.2.3\ldots(2m)$.

S. 64 Z. 2 v. u. statt $=\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ l. $=\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$.

S. 89 Z. 4. v. u. statt e^x l. a^x.

S. 89 Formel 4) statt a l. a^x.

S. 94 Z. 2 v. o. statt $m-k-1+1$ l. $m-\overline{k-1}+1$.

S. 98 Z. 4 v. o. statt $-\ldots$ l. $+\ldots$

S. 109 Formel 3) statt $\cos x = i \sin x$ l. $\cos x + i \sin x$.

S. 112 Z. 14 v. u. statt $\cos^3$ l. $\cos 3$.

S. 137 Formel 1) statt B^3 l. B_3.

S. 139 Z. 2 v. u. statt Gleichungen l. Ungleichungen.

S. 155 Z. 11 v. u. statt $= \frac{B_3 v^3}{1.2.3.4}$ l. $- \frac{B_3 v^3}{1.2.3.4}$

S. 160 Z. 7 v. u. statt $e^{2\pi}-1$ l. $e^{2\pi i}-1$.

S. 192 Formel 5) statt $\overset{1}{Z}_{x+1}$ l. $\overset{1}{z}_{x+1}$.

Digitized by Google

Math 2708.48
Theorie der Differenzen und Summen
Cabot Science 003283825
3 2044 091 886 580
Digitized by Google